

Exercice 1 — Suites

8 points

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 81 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{81}{u_n} \right) \end{cases}$$

- a) Détailler le calcul de u_1 , puis à l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes de u_2 et u_3 .

$$41, \frac{881}{41}, \frac{456161}{36121}$$

- b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite quand n tend vers $+\infty$.

La suite semble décroissante et converger vers $\sqrt{81}$.

2. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

- $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$
- $v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$
- $v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$
- $v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 16$

- b) Démontrer le sens de variation de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ d'où $2n + 1 > 0$: la suite est croissante.

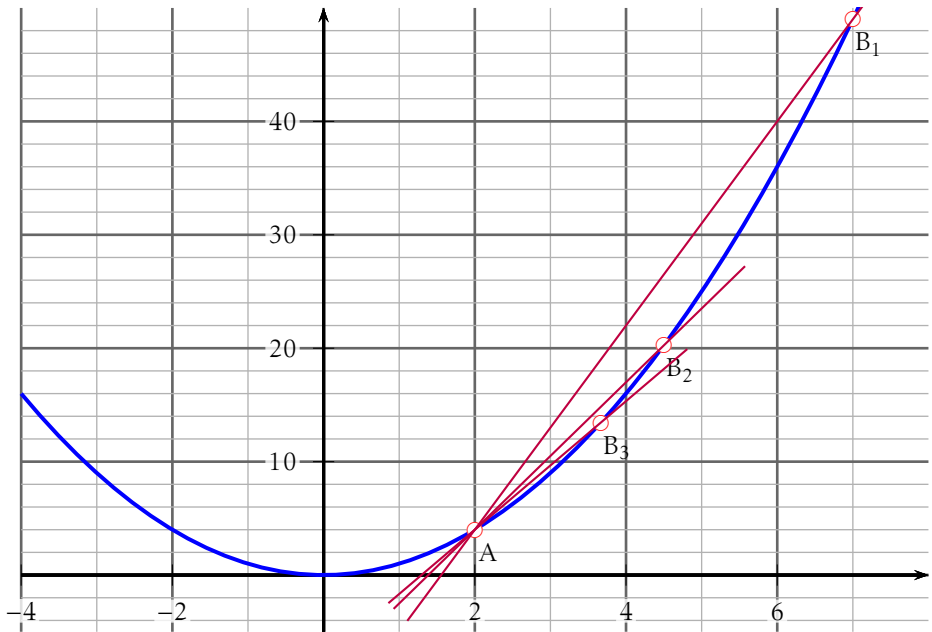
- c) En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier à partir duquel $v_n \geq 1\,233$.

on peut utiliser la calculatrice ou bien conjecturer que $v_n = n^2$: $\sqrt{1\,233} \approx 35, \dots$; comme la suite est croissante, on en déduit $n = 36$.

Exercice 2 — Droites et parabole

12 points

Le graphique représente la fonction $x \mapsto x^2$.



1. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $b_n = 2 + \frac{5}{n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de b_1 , b_2 et b_3 .

$$b_1 = 7; b_2 = \frac{9}{2}; b_3 = \frac{11}{3}$$

b) Conjecturer le sens de variations de la suite (b_n) , puis démontrer cette conjecture.

b_n est de la forme : $b_n = 2 + \frac{b}{n}$

On étudie le signe de

$$b_{n+1} - b_n = 2 + \frac{b}{n+1} - \left(2 + \frac{b}{n}\right)$$

$$b_{n+1} - b_n = 2 + \frac{b}{n+1} - 2 - \frac{b}{n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b \times n}{(n+1) \times n} - \frac{b \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-b}{n(n+1)}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n > 0$ et $n(n+1) > 0$: le signe de $b_{n+1} - b_n$ est celui de b .
Si $b > 0$, la suite est croissante ; sinon elle est décroissante.

- c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la convergence de la suite (b_n) . Si elle semble convergente, conjecturer sa limite.

La suite (b_n) converge vers 2.

2. Placer les points $A(2; 2^2)$ et les points $B_n(b_n; b_n^2)$ (pour $n \in \{1; 2; 3\}$) sur le graphique puis tracer les droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .
3. Déterminer à l'aide d'un calcul les équations réduites des droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .

les droites ont une équation de la forme :

$$y = \frac{b_n^2 - 2^2}{b_n - 2}(x - 2) + 2^2$$

$$y = (b_n + 2)(x - 2) + 2^2$$

$$y = (b_n + 2)x - 2b_n$$

$$y = 9x - 14; y = \frac{13}{2}x - 9; y = \frac{17}{3}x - \frac{22}{3}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (m_n) des coefficients directeurs des droites (AB_n) .

- a) Déterminer l'expression de m_n en fonction de n .

$$m_n = b_n + 2$$

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (m_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 2 \times 2$$

.

Exercice 1 — Suites

8 points

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 49 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{49}{u_n} \right) \end{cases}$$

- a) Détailler le calcul de u_1 , puis à l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes de u_2 et u_3 .

$$25, \frac{337}{25}, \frac{72097}{8425}$$

- b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite quand n tend vers $+\infty$.

La suite semble décroissante et converger vers $\sqrt{49}$.

2. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

- $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$
- $v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$
- $v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$
- $v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 16$

- b) Démontrer le sens de variation de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ d'où $2n + 1 > 0$: la suite est croissante.

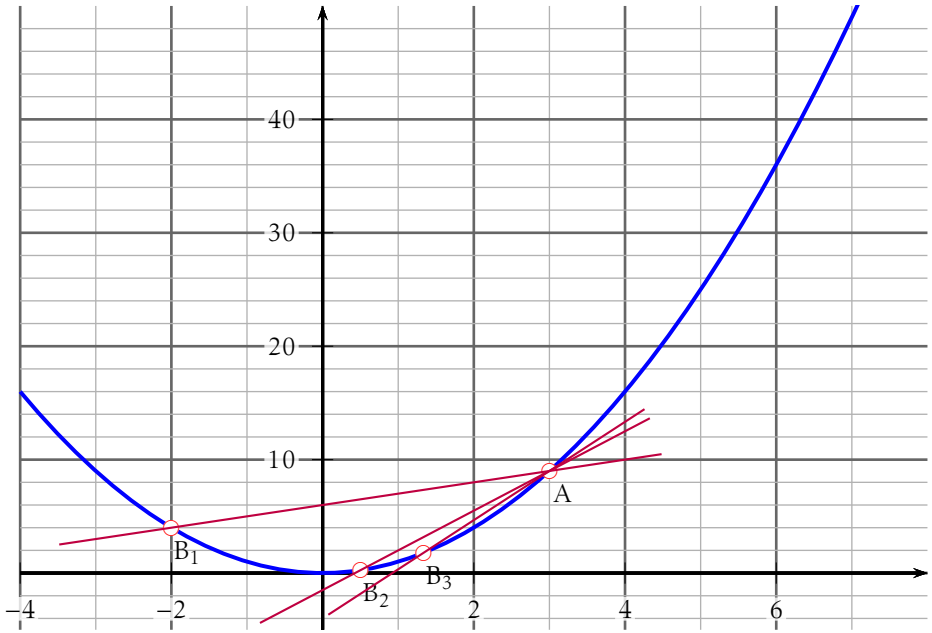
- c) En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier à partir duquel $v_n \geq 1\,244$.

on peut utiliser la calculatrice ou bien conjecturer que $v_n = n^2$: $\sqrt{1\,244} \approx 35, \dots$; comme la suite est croissante, on en déduit $n = 36$.

Exercice 2 — Droites et parabole

12 points

Le graphique représente la fonction $x \mapsto x^2$.



1. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $b_n = 3 + \frac{-5}{n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de b_1 , b_2 et b_3 .

$$b_1 = -2; b_2 = \frac{1}{2}; b_3 = \frac{4}{3}$$

b) Conjecturer le sens de variations de la suite (b_n) , puis démontrer cette conjecture.

b_n est de la forme : $b_n = 3 + \frac{b}{n}$

On étudie le signe de

$$b_{n+1} - b_n = 3 + \frac{b}{n+1} - \left(3 + \frac{b}{n}\right)$$

$$b_{n+1} - b_n = 3 + \frac{b}{n+1} - 3 - \frac{b}{n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b \times n}{(n+1) \times n} - \frac{b \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-b}{n(n+1)}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n > 0$ et $n(n+1) > 0$: le signe de $b_{n+1} - b_n$ est celui de b .
Si $b > 0$, la suite est croissante ; sinon elle est décroissante.

- c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la convergence de la suite (b_n) . Si elle semble convergente, conjecturer sa limite.

La suite (b_n) converge vers 3.

2. Placer les points $A(3; 3^2)$ et les points $B_n(b_n; b_n^2)$ (pour $n \in \{1; 2; 3\}$) sur le graphique puis tracer les droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .
3. Déterminer à l'aide d'un calcul les équations réduites des droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .

les droites ont une équation de la forme :

$$y = \frac{b_n^2 - 3^2}{b_n - 3}(x - 3) + 3^2$$

$$y = (b_n + 3)(x - 3) + 3^2$$

$$y = (b_n + 3)x - 3b_n$$

$$y = x + 6; y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}; y = \frac{13}{3}x - 4$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (m_n) des coefficients directeurs des droites (AB_n) .

- a) Déterminer l'expression de m_n en fonction de n .

$$m_n = b_n + 3$$

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (m_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 2 \times 3$$

Exercice 1 — Suites

8 points

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 25 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{25}{u_n} \right) \end{cases}$$

- a) Détailler le calcul de u_1 , puis à l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes de u_2 et u_3 .

$$13, \frac{97}{13}, \frac{6817}{1261}$$

- b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite quand n tend vers $+\infty$.

La suite semble décroissante et converger vers $\sqrt{25}$.

2. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

- $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$
- $v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$
- $v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$
- $v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 16$

- b) Démontrer le sens de variation de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ d'où $2n + 1 > 0$: la suite est croissante.

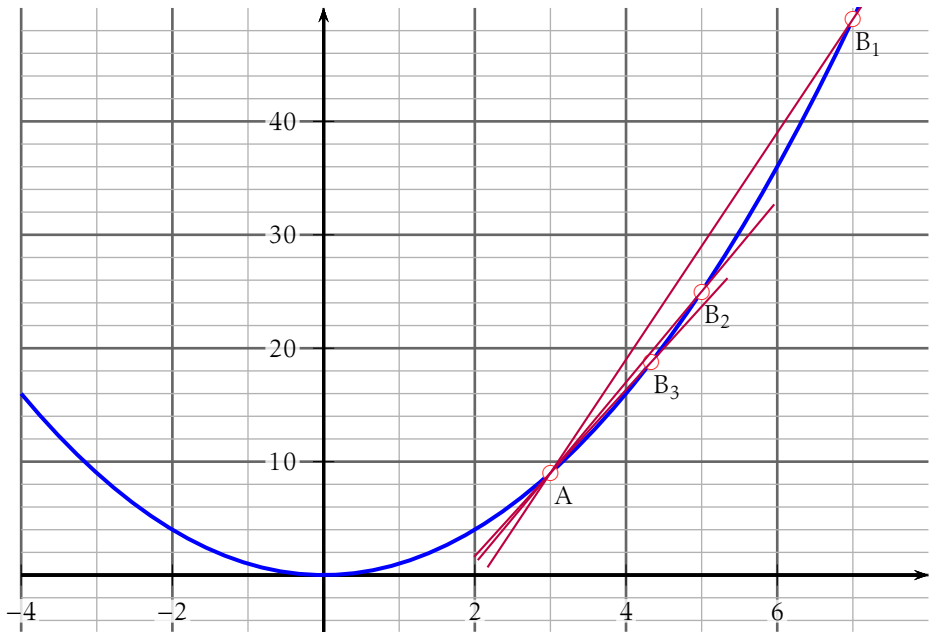
- c) En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier à partir duquel $v_n \geq 1\,255$.

on peut utiliser la calculatrice ou bien conjecturer que $v_n = n^2$: $\sqrt{1\,255} \approx 35, \dots$; comme la suite est croissante, on en déduit $n = 36$.

Exercice 2 — Droites et parabole

12 points

Le graphique représente la fonction $x \mapsto x^2$.



1. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $b_n = 3 + \frac{4}{n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de b_1 , b_2 et b_3 .

$$b_1 = 7; b_2 = 5; b_3 = \frac{13}{3}$$

b) Conjecturer le sens de variations de la suite (b_n) , puis démontrer cette conjecture.

b_n est de la forme : $b_n = 3 + \frac{b}{n}$

On étudie le signe de

$$b_{n+1} - b_n = 3 + \frac{b}{n+1} - \left(3 + \frac{b}{n}\right)$$

$$b_{n+1} - b_n = 3 + \frac{b}{n+1} - 3 - \frac{b}{n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b \times n}{(n+1) \times n} - \frac{b \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-b}{n(n+1)}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n > 0$ et $n(n+1) > 0$: le signe de $b_{n+1} - b_n$ est celui de b .
Si $b > 0$, la suite est croissante ; sinon elle est décroissante.

- c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la convergence de la suite (b_n) . Si elle semble convergente, conjecturer sa limite.

La suite (b_n) converge vers 3.

2. Placer les points $A(3; 3^2)$ et les points $B_n(b_n; b_n^2)$ (pour $n \in \{1; 2; 3\}$) sur le graphique puis tracer les droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .
3. Déterminer à l'aide d'un calcul les équations réduites des droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .

les droites ont une équation de la forme :

$$y = \frac{b_n^2 - 3^2}{b_n - 3}(x - 3) + 3^2$$

$$y = (b_n + 3)(x - 3) + 3^2$$

$$y = (b_n + 3)x - 3b_n$$

$$y = 10x - 21; y = 8x - 15; y = \frac{22}{3}x - 13$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (m_n) des coefficients directeurs des droites (AB_n) .

- a) Déterminer l'expression de m_n en fonction de n .

$$m_n = b_n + 3$$

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (m_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 2 \times 3$$

Exercice 1 — Suites

8 points

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{9}{u_n} \right) \end{cases}$$

- a) Détailler le calcul de u_1 , puis à l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes de u_2 et u_3 .

$$5, \frac{17}{5}, \frac{257}{85}$$

- b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite quand n tend vers $+\infty$.

La suite semble décroissante et converger vers $\sqrt{9}$.

2. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$$

- a) Calculer les valeurs exactes de v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

- $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$
- $v_2 = v_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$
- $v_3 = v_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$
- $v_4 = v_3 + 2 \times 3 + 1 = 16$

- b) Démontrer le sens de variation de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ d'où $2n + 1 > 0$: la suite est croissante.

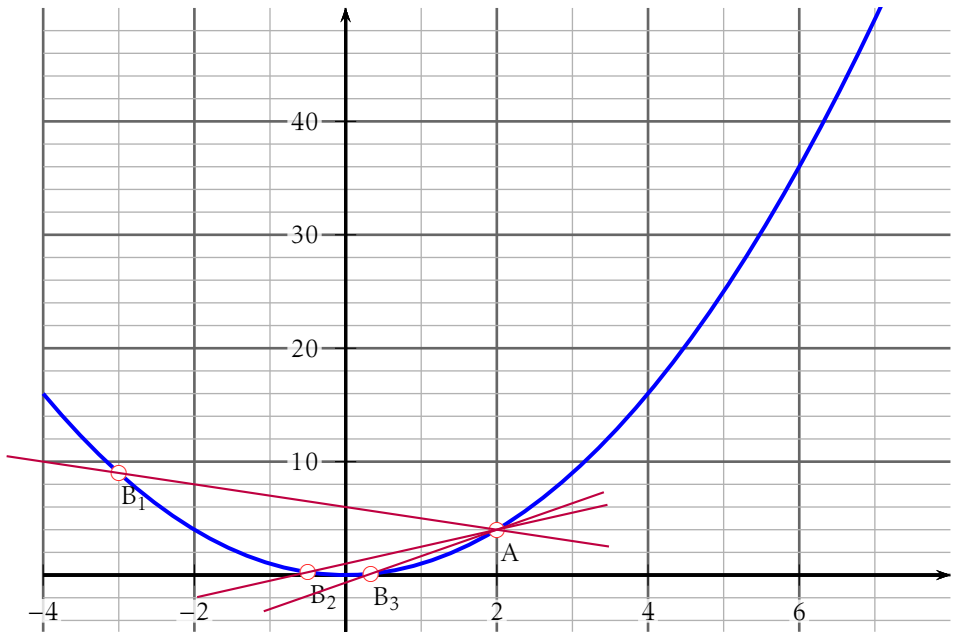
- c) En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier à partir duquel $v_n \geq 1\,266$.

on peut utiliser la calculatrice ou bien conjecturer que $v_n = n^2$: $\sqrt{1\,266} \approx 35, \dots$; comme la suite est croissante, on en déduit $n = 36$.

Exercice 2 — Droites et parabole

12 points

Le graphique représente la fonction $x \mapsto x^2$.



1. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $b_n = 2 + \frac{-5}{n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de b_1 , b_2 et b_3 .

$$b_1 = -2; b_2 = -\frac{1}{2}; b_3 = \frac{1}{3}$$

b) Conjecturer le sens de variations de la suite (b_n) , puis démontrer cette conjecture.

b_n est de la forme : $b_n = 2 + \frac{b}{n}$

On étudie le signe de

$$b_{n+1} - b_n = 2 + \frac{b}{n+1} - \left(2 + \frac{b}{n}\right)$$

$$b_{n+1} - b_n = 2 + \frac{b}{n+1} - 2 - \frac{b}{n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b \times n}{(n+1) \times n} - \frac{b \times (n+1)}{n \times (n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-b}{n(n+1)}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n > 0$ et $n(n+1) > 0$: le signe de $b_{n+1} - b_n$ est celui de b .
Si $b > 0$, la suite est croissante ; sinon elle est décroissante.

- c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la convergence de la suite (b_n) . Si elle semble convergente, conjecturer sa limite.

La suite (b_n) converge vers 2.

2. Placer les points $A(2; 2^2)$ et les points $B_n(b_n; b_n^2)$ (pour $n \in \{1; 2; 3\}$) sur le graphique puis tracer les droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .
3. Déterminer à l'aide d'un calcul les équations réduites des droites (AB_1) , (AB_2) et (AB_3) .

les droites ont une équation de la forme :

$$y = \frac{b_n^2 - 2^2}{b_n - 2}(x - 2) + 2^2$$

$$y = (b_n + 2)(x - 2) + 2^2$$

$$y = (b_n + 2)x - 2b_n$$

$$y = -x + 6; y = \frac{3}{2}x + 1; y = \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (m_n) des coefficients directeurs des droites (AB_n) .

- a) Déterminer l'expression de m_n en fonction de n .

$$m_n = b_n + 2$$

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (m_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 2 \times 2$$

.