1ère SPE — **DS de Mathématiques** — **01 février 2025**

Nom Prénom .... / 40

Sujet A

✍ 2 h

La note tient compte de la qualité de la rédaction.

Pour chaque exercice, sont donnés le temps estimé pour le faire et la difficulté sur une échelle de ★ à ★★★.

Exercice 1 — ★ : Bénéfice sur des stylos   25 *min*   (11 **pts**)

Une entreprise fabrique des stylos à billes en très grande quantité.
Une machine peut fabriquer par jour jusqu'à 10 000 pièces.
Le bénéfice journalier réalisé par machine est donné par la fonction suivante :

$$B(x) = -x^2 + 5x - 6$$

Avec :

- x la quantité de stylos fabriqués et vendus **en milliers**.
- $B(x)$ la valeur **en milliers d'euros** du bénéfice réalisé pour x milliers de stylos vendus.

1. Vérifier que le bénéfice réalisé pour 2 100 stylos fabriqués et vendus est bien de 90 €.

$2\,100 = S$ milliers de stylos.
On calcule $B(S)$ qui est la valeur en milliers d'euros donc $B(S) \times 1\,000€ = 90€$.
Ainsi, le bénéfice réalisé pour 2 100 stylos fabriqués et vendus est bien de 90 €.

2. On souhaite déterminer pour quelle(s) quantité(s) le bénéfice est nul.

a) Déterminer une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$.

Sujet A : $B(2) = -2^2 + 5 \times 2 - 6 = -4 + 10 - 6 = 0$.
Donc une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$ est 2.

Sujet B : $B(1) = -1^2 + 5 \times 1 - 4 = -1 + 5 - 4 = 0$.
Donc une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$ est 1.

b) Quelle est la somme et le produit des racines de $B(x)$?

Sujet A : B est une fonction du second degré avec $a = -1$, $b = 5$, $c = -6$.
La somme des racines de $B(x)$ est : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5}{-1} = 5$.
Le produit des racines de $B(x)$ est : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-6}{-1} = 6$.

Sujet B : B est une fonction du second degré avec $a = -1$, $b = 5$, $c = -4$.
La somme des racines de $B(x)$ est : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5}{-1} = 5$.
Le produit des racines de $B(x)$ est : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-4}{-1} = 4$.

c) En déduire l'autre solution.

On utilise la somme (ou le produit des racines :)

Sujet A : $x_1 + x_2 = 5 \iff 2 + x_2 = 5 \iff x_2 = 3$.
$x_1 \times x_2 = 2 \times 3 = 6$.
L'autre solution est donc 3.

Sujet B : $x_1 + x_2 = 5 \iff 1 + x_2 = 5 \iff x_2 = 4$.
$x_1 \times x_2 = 1 \times 4 = 4$.
L'autre solution est donc 4.

d) Quelles sont alors les quantités qui conduisent à un bénéfice nul ?

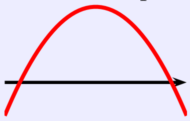
Sujet A : Les racines de la fonction $B(x)$ sont 2 et 3.
Ainsi, les quantités qui conduisent à un bénéfice nul sont 2 000 et 3 000 stylos.

Sujet B : Les racines de la fonction $B(x)$ sont 1 et 4.
Ainsi, les quantités qui conduisent à un bénéfice nul sont 1 000 et 4 000 stylos.

3. On souhaite à présent déterminer les quantité(s) pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

a) Établir le tableau de signes de la fonction B.

La fonction B est une fonction du second degré. Comme $a < 0$, $B(x)$ est partout du signe de a sauf entre ses racines ou bien : la parabole est orientée vers le bas :



On obtient le tableau de signes suivant de la fonction B :

Sujet A :

x	0		2		3		10
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sujet B :

x	0		1		4		10
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Sujet A : L'entreprise réalise un bénéfice dès que $B(x) > 0$, soit quand $x \in]2;3[$.

Ainsi, l'entreprise commence à réaliser des bénéfices lorsqu'elle fabrique et vend entre 2 001 et 2 999 pièces.

Sujet B : L'entreprise réalise un bénéfice dès que $B(x) > 0$, soit quand $x \in]1;4[$.

Ainsi, l'entreprise commence à réaliser des bénéfices lorsqu'elle fabrique et vend entre 1 001 et 3 999 pièces.

4. On souhaite déterminer la quantité pour laquelle l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

a) Donner la forme canonique de la fonction B.

Sujet A : On détermine :

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2\times(-1)} = 2,5$
- $\beta = B(\alpha) = B(2,5) = 0,25$

Ainsi, la forme canonique de la fonction B est $B(x) = -(x-2,5)^2 + 0,25$.

Sujet B : On détermine :

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2\times(-1)} = 2,5$
- $\beta = B(\alpha) = B(2,5) = 2,25$

Ainsi, la forme canonique de la fonction B est $B(x) = -(x-2,5)^2 + 2,25$.

b) Établir le tableau de variations de la fonction B.

Comme $a < 0$, la courbe est tournée vers le bas.

On obtient le tableau de variations suivant de la fonction B.

Sujet A :

x	0		2,5		10
variations de B		$\nearrow$	0,25	$\searrow$	

Sujet B :

x	0		2,5		10
variations de B		$\nearrow$	2,25	$\searrow$	

c) Pour quelle quantité l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Comme $a < 0$, la fonction B admet un maximum pour $\alpha = 2,5$.

Ainsi, la quantité de stylos est de $2,5 \times 1\,000 = 2\,500$.

Sujet A : Le maximum est alors : $B(2,5) = 0,25$ milliers d'euros $= 0,25 \times 1\,000$€ $= 250$€.

L'entreprise réalise un bénéfice maximal pour 2 500 stylos. Ce bénéfice est alors de 250€.

Sujet B : Le maximum est alors : $B(2,5) = 2,25$ milliers d'euros $= 2,25 \times 100$€ $= 225$€.

L'entreprise réalise un bénéfice maximal pour 2 500 stylos. Ce bénéfice est alors de 225€.

Exercice 2 — ★ : Café ou thé ? Avec ou sans sucre ? *20 min* (8 **pts**)

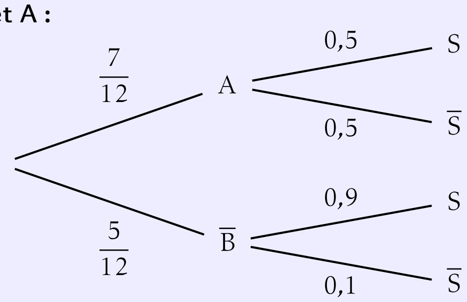
Le matin, Joao boit du café avec une probabilité de $\frac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{5}{12}$.

Lorsqu'il boit du café, il y met du sucre la moitié du temps, alors que quand il boit du thé, il y met du sucre 90% du temps. On appelle :

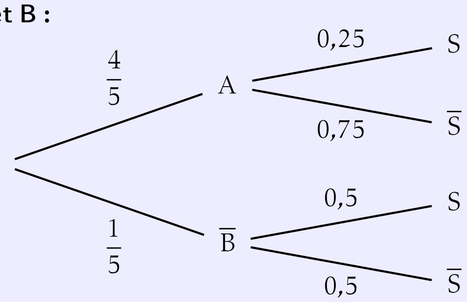
- A : l'évènement « il boit du café le matin » ;
- B : l'évènement « il boit du thé le matin » ;
- S : l'évènement « il met du sucre dans sa boisson le matin ».

1. Construire un arbre pondéré, décrivant la situation.

Sujet A :



Sujet B :



2. Quelle est la probabilité qu'il boive du café sucré ce matin ?

Sujet A : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$.

Sujet B : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

3. Déterminer que la probabilité qu'il mette du sucre dans sa boisson ce matin est égale à $\frac{2}{3}$.

$S \cap A$ et $S \cap B$ forment une partition de S, car A et B partitionnent l'univers.
Par la formule des probabilités totales,
Sujet A :

$$\begin{aligned}
p(S) &= p(S \cap A) + p(S \cap B) \\
&= p(A) \times p_A(S) + p(B) \times p_B(S) \\
&= \frac{7}{24} + \frac{5}{12} \times \frac{9}{10} \\
&= \frac{7}{24} + \frac{3}{8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

La probabilité qu'il mette du sucre dans sa boisson ce matin est de $\frac{2}{3}$.
Sujet B :

$$\begin{aligned}
p(S) &= p(S \cap A) + p(S \cap B) \\
&= p(A) \times p_A(S) + p(B) \times p_B(S) \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{12}{20} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}
\end{aligned}$$

La probabilité qu'il ne mette pas du sucre dans sa boisson ce matin est de $\frac{7}{10}$.

4. Joao n'a pas mis de sucre ce matin. Quelle est la probabilité qu'il ait pris un thé ?

Sujet A : On a : $p(S) = 1 - p(\overline{S}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$.
La probabilité qu'il ait pris un café est :

$$\begin{aligned}
p_{\overline{S}}(B) &= \frac{p(\overline{S} \cap B)}{p(\overline{S})} \\
&= \frac{p(B) \times p_B(\overline{S})}{p(\overline{S})} \\
&= \frac{\frac{5}{12} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{24} \times 3 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Sujet B : On a : $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
La probabilité qu'il ait pris un thé est :

$$\begin{aligned}
p_{\overline{S}}(A) &= \frac{p(\overline{S} \cap A)}{p(\overline{S})} \\
&= \frac{p(A) \times p_A(\overline{S})}{p(\overline{S})} \\
&= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

5. Pierre prend un croissant et/ou un pain au chocolat le matin. Le choix des deux viennoiseries est **indépendant** l'un de l'autre. On note :
   - E : l'évènement « Pierre prend un croissant ».

- F : l'évènement « Pierre prend un pain au chocolat ».

Il prend un croissant avec une probabilité $p(\mathrm{E}) = \frac{1}{3}$. La probabilité qu'il prenne les deux est de $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = \frac{1}{12}$.
Déterminer alors la probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin.

Les événements étant indépendants, on a :
$p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = p(\mathrm{E}) \times p(\mathrm{F}) \iff p(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{E})} \iff p(\mathrm{F})$

sujet A : $= \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

La probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin est : $p(\mathrm{F}) = \frac{1}{4}$.

sujet B : $= \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin est : $p(\mathrm{F}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 — ★★ : Accroissement naturel *25 min* (9 **pts**)

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de 0,55 % par an depuis 1999 selon l'INSEE.

On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui sont sorties au cours de l'année) est d'environ 75 000.

En 2018, le nombre d'habitants en France était de 67,2 millions. On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (**en milliers**) en France, l'année $2018 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer p_1.

67,2 millions = 67 200 milliers ; 75 000 = 75 milliers ; augmenter de 0,55 % revient à multiplier par $(1+0{,}0055)$, donc : $p_1 = 67\,200 \times (1 + 0{,}0055) + 75 = 67\,644{,}6$.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $p_{n+1} = 1{,}0055 p_n + 75$.

Chaque année l'accroissement naturel est de 0,55 % ce qui correspond à une augmentation de 0,55 % dont le coefficient multiplicateur est $1 + 0{,}0055 = 1{,}0055$.
Le solde migratoire vaut 75 000 donc 75 milliers d'habitants en plus qui s'ajoute à l'augmentation précédente.
On obtient alors, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 1{,}0055 p_n + 75$.

3. a) Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme ci-contre pour qu'il retourne le nombre estimé d'habitants en France à l'année $2018 + n$.

```
1 def nb_hab_France(n):
2     p = 6700
3     for i in range (...) :
4         .................................
5     return
```

b) On saisit l'instruction `nb_hab_France(4)`.
Compléter le tableau d'états ci-dessous pour justifier ce que renvoie la saisie. ***On ajoutera autant de colonnes que nécessaire.***

i	0	
p	67 200	

i	0	1	2	3	4
p	67 200	67 644,6	68 091,6453	68 541,1493	68 993,1257

4. On admet que pour tout entier naturel n, $p_n = 80\,836{,}36364 \times 1{,}0055^n - 13\,636{,}36364$.

a) Calculer le nombre d'habitants en 2025 en utilisant la formule précédente.

l'année 2018 correspond à $n = 0$; donc l'année 2025 correspond à $n = 7$.
$p_7 = 80\,836{,}36364 \times 1{,}0055^7 - 13\,636{,}36364 = 70\,364{,}024617913$
En 2019, le nombre d'habitants était de 70 364 milliers.

b) Déterminer les variations de la suite (p_n) en utilisant la méthode $p_{n+1}-p_n$.

Pour tout entier naturel n,

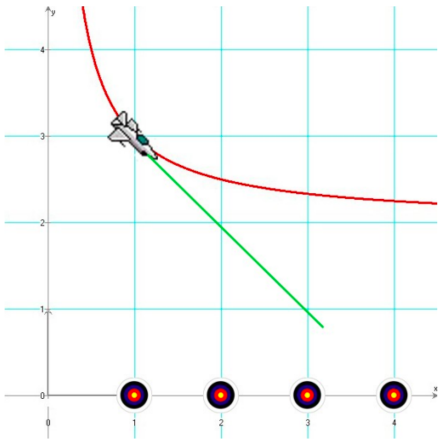
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n+1} - 13\,636{,}363\,64 - (80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n} - 13\,636{,}363\,64)$$
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n+1} - 13\,636{,}363\,64 - 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n} + 13\,636{,}363\,64$$
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n+1} - 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n}$$
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n}\times 1{,}005\,5 - 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n}$$
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n}\times (1{,}005\,5-1)$$
$$p_{n+1}-p_n = 80\,836{,}363\,64\times 1{,}005\,5^{n}\times 0{,}005\,5$$

On reconnaît le produit de trois nombres positifs.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $p_{n+1}-p_n>0$.
Ainsi la suite (p_n) est strictement croissante.

Exercice 4 — ★★★ : Jeu vidéo

20 min (12 **pts**)

Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe $[Ox)$ aux abscisses 1, 2 , 3 et 4.



On sait que la trajectoire de l'avion correspond à la représentation graphique de la fonction

$$f(x) = 2+\frac{1}{x} \qquad (x>0).$$

1. Le centre de la cible n° 4 sera-t-il touché si le joueur tire au moment où l'avion est en $(1\,;3)$?

L'équation de la tangente au point d'abscisse $(1\,;3)$ est donnée par : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$
Calculons $f'(1)$.
$\tau(h) = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1}{h}\times(f(1+h-f(1))$

- $f(1+h) = 2+\dfrac{1}{1+h}$
- $f(1) = 2+\dfrac{1}{1} = 3$
- $f(1+h)-f(1) = 2+\dfrac{1}{1+h}-3 = \dfrac{1}{1+h}-1 = \dfrac{1-(1+h)}{1+h} = \dfrac{-h}{1+h}$

donc $\tau(h) = \dfrac{1}{h}\times\dfrac{-h}{1+h} = \dfrac{-1}{1+h}$
$\lim\limits_{h\to 0}\tau(h) = -1$
donc l'équation de la tangente est : $y = -1\times(x-1)+3 = -x+4$
Le centre de la cible n° 4 est sur la tangente au point d'abscisse 1, si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente ; les coordonnées du centre de la cible sont $(4\,;0)$, et on a bien $0=-4+4$.
On en déduit que le centre de la cible n° 4 sera touché si le joueur tire au moment où l'avion est en $(1\,;3)$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'abscisse de l'avion permettant d'atteindre le centre de la cible n° 2.

a) On appelle a l'abscisse de cet avion. Montrer qu'atteindre la cible n° 2 équivaut à résoudre l'équation

$$2a^2 + 2a - 2 = 0$$

.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $(a ; f(a))$ est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Calculons $f'(a)$.

$\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{1}{h} \times (f(a+h - f(a))$

- $f(a+h) = 2 + \dfrac{1}{a+h}$
- $f(a) = 2 + \dfrac{1}{a}$
- $f(a+h) - f(a) = 2 + \dfrac{1}{a+h} - \left(2 + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \dfrac{-h}{a(a+h)}$

donc $\tau(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{-1}{a^2}$

donc l'équation de la tangente est : $y = -\dfrac{1}{a^2} \times (x-a) + 2 + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a} + 2 + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} + 2$

sujet A : le centre de la cible n° 2 sera atteint si le point $(2 ; 0)$ appartient à la tangente ; c'est à dire si :

$0 = -\dfrac{1}{a^2} \times 2 + \dfrac{2}{a} + 2 \Leftrightarrow 0 = -2 + 2a + 2a^2$

sujet B : le centre de la cible n° 3 sera atteint si le point $(3 ; 0)$ appartient à la tangente ; c'est à dire si :

$0 = -\dfrac{1}{a^2} \times 3 + \dfrac{2}{a} + 2 \Leftrightarrow 0 = -3 + 2a + 2a^2$

b) En déduire l'abscisse de l'avion cherchée.

Il faut résoudre une équation du second degré et ne garder que la solution positive car $a > 0$.

1ère SPE — **DS de Mathématiques** — 01 février 2025

Nom Prénom .... / 40

Sujet B

✍ 2 h

La note tient compte de la qualité de la rédaction.

Pour chaque exercice, sont donnés le temps estimé pour le faire et la difficulté sur une échelle de ★ à ★★★.

Exercice 1 — ★ : Bénéfice sur des stylos — 25 *min* — (11 **pts**)

Une entreprise fabrique des stylos à billes en très grande quantité.
Une machine peut fabriquer par jour jusqu'à 10 000 pièces.
Le bénéfice journalier réalisé par machine est donné par la fonction suivante :

$$B(x) = -x^2 + 5x - 4$$

Avec :

- x la quantité de stylos fabriqués et vendus **en milliers**.
- $B(x)$ la valeur **en centaines d'euros** du bénéfice réalisé pour x milliers de stylos vendus.

1. Vérifier que le bénéfice réalisé pour 3 100 stylos fabriqués et vendus est bien de 189 €.

3 100 = S milliers de stylos.
On calcule B(S) qui est la valeur en milliers d'euros donc $B(S) \times 1\,000€ = 189€$.
Ainsi, le bénéfice réalisé pour 3 100 stylos fabriqués et vendus est bien de 189 €.

2. On souhaite déterminer pour quelle(s) quantité(s) le bénéfice est nul.

a) Déterminer une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$.

Sujet A : $B(2) = -2^2 + 5 \times 2 - 6 = -4 + 10 - 6 = 0$.
Donc une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$ est 2.

Sujet B : $B(1) = -1^2 + 5 \times 1 - 4 = -1 + 5 - 4 = 0$.
Donc une solution évidente de l'équation $B(x) = 0$ est 1.

b) Quelle est la somme et le produit des racines de $B(x)$?

Sujet A : B est une fonction du second degré avec $a = -1$, $b = 5$, $c = -6$.
La somme des racines de $B(x)$ est : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{-1} = 5$.
Le produit des racines de $B(x)$ est : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{-1} = 6$.

Sujet B : B est une fonction du second degré avec $a = -1$, $b = 5$, $c = -4$.
La somme des racines de $B(x)$ est : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{-1} = 5$.
Le produit des racines de $B(x)$ est : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{-1} = 4$.

c) En déduire l'autre solution.

On utilise la somme (ou le produit des racines :)

Sujet A : $x_1 + x_2 = 5 \iff 2 + x_2 = 5 \iff x_2 = 3$.
$x_1 \times x_2 = 2 \times 3 = 6$.
L'autre solution est donc 3.

Sujet B : $x_1 + x_2 = 5 \iff 1 + x_2 = 5 \iff x_2 = 4$.
$x_1 \times x_2 = 1 \times 4 = 4$.
L'autre solution est donc 4.

d) Quelles sont alors les quantités qui conduisent à un bénéfice nul ?

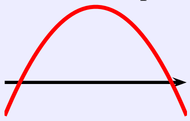
Sujet A : Les racines de la fonction $B(x)$ sont 2 et 3.
Ainsi, les quantités qui conduisent à un bénéfice nul sont 2 000 et 3 000 stylos.

Sujet B : Les racines de la fonction $B(x)$ sont 1 et 4.
Ainsi, les quantités qui conduisent à un bénéfice nul sont 1 000 et 4 000 stylos.

3. On souhaite à présent déterminer les quantité(s) pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

a) Établir le tableau de signes de la fonction B.

La fonction B est une fonction du second degré. Comme $a < 0$, $B(x)$ est partout du signe de a sauf entre ses racines ou bien : la parabole est orientée vers le bas :



On obtient le tableau de signes suivant de la fonction B :

Sujet A :

x	0		2		3		10
signe de $B(x)$		−	0	+	0	−	

Sujet B :

x	0		1		4		10
signe de $B(x)$		−	0	+	0	−	

b) Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Sujet A : L'entreprise réalise un bénéfice dès que $B(x) > 0$, soit quand $x \in]2;3[$.

Ainsi, l'entreprise commence à réaliser des bénéfices lorsqu'elle fabrique et vend entre 2 001 et 2 999 pièces.

Sujet B : L'entreprise réalise un bénéfice dès que $B(x) > 0$, soit quand $x \in]1;4[$.

Ainsi, l'entreprise commence à réaliser des bénéfices lorsqu'elle fabrique et vend entre 1 001 et 3 999 pièces.

4. On souhaite déterminer la quantité pour laquelle l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

a) Donner la forme canonique de la fonction B.

Sujet A : On détermine :

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2\times(-1)} = 2,5$
- $\beta = B(\alpha) = B(2,5) = 0,25$

Ainsi, la forme canonique de la fonction B est $B(x) = -(x-2,5)^2 + 0,25$.

Sujet B : On détermine :

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2\times(-1)} = 2,5$
- $\beta = B(\alpha) = B(2,5) = 2,25$

Ainsi, la forme canonique de la fonction B est $B(x) = -(x-2,5)^2 + 2,25$.

b) Établir le tableau de variations de la fonction B.

Comme $a < 0$, la courbe est tournée vers le bas.

On obtient le tableau de variations suivant de la fonction B.

Sujet A :

x	0		2,5		10
variations de B		↗	0,25	↘	

Sujet B :

x	0		2,5		10
variations de B		↗	2,25	↘	

c) Pour quelle quantité l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Comme $a < 0$, la fonction B admet un maximum pour $\alpha = 2,5$.

Ainsi, la quantité de stylos est de $2,5 \times 1\,000 = 2\,500$.

Sujet A : Le maximum est alors : B(2,5) = 0,25 milliers d'euros = $0,25 \times 1\,000$€ = 250€.

L'entreprise réalise un bénéfice maximal pour 2 500 stylos. Ce bénéfice est alors de 250€.

Sujet B : Le maximum est alors : B(2,5) = 2,25 milliers d'euros = $2,25 \times 100$€ = 225€.

L'entreprise réalise un bénéfice maximal pour 2 500 stylos. Ce bénéfice est alors de 225€.

Exercice 2 — ★ : Café ou thé ? Avec ou sans sucre ? 20 *min* (8 **pts**)

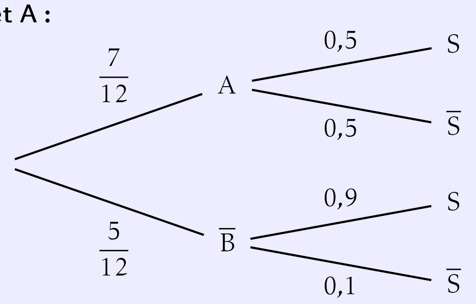
Le matin, Joao boit du café avec une probabilité de $\frac{4}{5}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{1}{5}$.

Lorsqu'il boit du café, il y met du sucre le quart du temps, alors que quand il boit du thé, il y met du sucre la moitié du temps. On appelle :

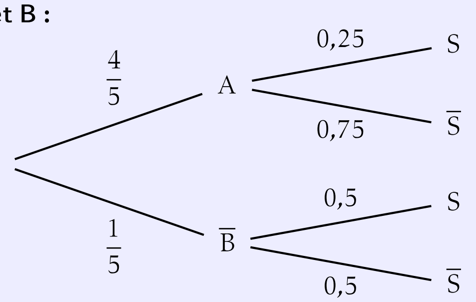
- A : l'évènement « il boit du café le matin » ;
- B : l'évènement « il boit du thé le matin » ;
- S : l'évènement « il met du sucre dans sa boisson le matin ».

1. Construire un arbre pondéré, décrivant la situation.

Sujet A :



Sujet B :



2. Quelle est la probabilité qu'il boive du thé non sucré ce matin ?

Sujet A : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$.

Sujet B : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

3. Déterminer que la probabilité qu'il ne mette pas du sucre dans sa boisson ce matin est égale à $\frac{7}{10}$.

$S \cap A$ et $S \cap B$ forment une partition de S, car A et B partitionnent l'univers.
Par la formule des probabilités totales,
Sujet A :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(S\cap A) + p(S\cap B)\\ &= p(A)\times p_A(S) + p(B)\times p_B(S)\\ &= \frac{7}{24} + \frac{5}{12}\times\frac{9}{10}\\ &= \frac{7}{24} + \frac{3}{8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La probabilité qu'il mette du sucre dans sa boisson ce matin est de $\frac{2}{3}$.

Sujet B :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(S\cap A) + p(S\cap B)\\ &= p(A)\times p_A(S) + p(B)\times p_B(S)\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{10}\\ &= \frac{12}{20} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

La probabilité qu'il ne mette pas du sucre dans sa boisson ce matin est de $\frac{7}{10}$.

4. Joao a mis du sucre ce matin. Quelle est la probabilité qu'il ait pris un café ?

Sujet A : On a : $p(S) = 1 - p(\overline{S}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$.
La probabilité qu'il ait pris un café est :

$$\begin{aligned} p_{\overline{S}}(B) &= \frac{p(\overline{S}\cap B)}{p(\overline{S})}\\ &= \frac{p(B)\times p_B(\overline{S})}{p(\overline{S})}\\ &= \frac{\frac{5}{12}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{24}\times 3 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Sujet B : On a : $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
La probabilité qu'il ait pris un thé est :

$$\begin{aligned} p_{\overline{S}}(A) &= \frac{p(\overline{S}\cap A)}{p(\overline{S})}\\ &= \frac{p(A)\times p_A(\overline{S})}{p(\overline{S})}\\ &= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}}\\ &= \frac{1}{5}\times\frac{10}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Pierre prend un croissant et/ou un pain au chocolat le matin. Le choix des deux viennoiseries est **indépendant** l'un de l'autre. On note :
   - E : l'évènement « Pierre prend un croissant ».

- F : l'évènement « Pierre prend un pain au chocolat ».

Il prend un croissant avec une probabilité $p(\text{E}) = \dfrac{1}{4}$. La probabilité qu'il prenne les deux est de $p(\text{E} \cap \text{F}) = \dfrac{1}{8}$.
Déterminer alors la probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin.

Les événements étant indépendants, on a :
$p(\text{E} \cap \text{F}) = p(\text{E}) \times p(\text{F}) \iff p(\text{F}) = \dfrac{p(\text{E} \cap \text{F})}{p(\text{E})} \iff p(\text{F})$

sujet A : $= \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

La probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin est : $p(\text{F}) = \dfrac{1}{4}$.

sujet B : $= \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité qu'il prenne un pain au chocolat le matin est : $p(\text{F}) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 — ★★ : Accroissement naturel   *25 min*   (9 **pts**)

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de 0,55 % par an depuis 1999 selon l'INSEE.

On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui sont sorties au cours de l'année) est d'environ 75 000.

En 2018, le nombre d'habitants en France était de 67,2 millions. On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (**en milliers**) en France, l'année $2018 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer p_1.

67,2 millions = 67 200 milliers ; 75 000 = 75 milliers ; augmenter de 0,55 % revient à multiplier par $(1+0{,}0055)$, donc :
$p_1 = 67\,200 \times (1 + 0{,}0055) + 75 = 67\,644{,}6$.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $p_{n+1} = 1{,}0055 p_n + 75$.

Chaque année l'accroissement naturel est de 0,55 % ce qui correspond à une augmentation de 0,55 % dont le coefficient multiplicateur est $1 + 0{,}0055 = 1{,}0055$.
Le solde migratoire vaut 75 000 donc 75 milliers d'habitants en plus qui s'ajoute à l'augmentation précédente.
On obtient alors, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 1{,}0055 p_n + 75$.

3. **a)** Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme ci-contre pour qu'il retourne le nombre estimé d'habitants en France à l'année $2018 + n$.

```
1 def nb_hab_France(n):
2     p = 6700
3     for i in range (...) :
4         .................................
5     return
```

b) On saisit l'instruction `nb_hab_France(4)`.
Compléter le tableau d'états ci-dessous pour justifier ce que renvoie la saisie. ***On ajoutera autant de colonnes que nécessaire.***

i	0	
p	67 200	

i	0	1	2	3	4
p	67 200	67 644,6	68 091,645 3	68 541,149 3	68 993,125 7

4. On admet que pour tout entier naturel n, $p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}0055^n - 13\,636{,}363\,64$.

a) Calculer le nombre d'habitants en 2025 en utilisant la formule précédente.

l'année 2018 correspond à $n = 0$; donc l'année 2025 correspond à $n = 7$.
$p_7 = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}0055^7 - 13\,636{,}363\,64 = 70\,364{,}024\,617\,913$
En 2019, le nombre d'habitants était de 70 364 milliers.

b) Déterminer les variations de la suite (p_n) en utilisant la méthode $p_{n+1} - p_n$.

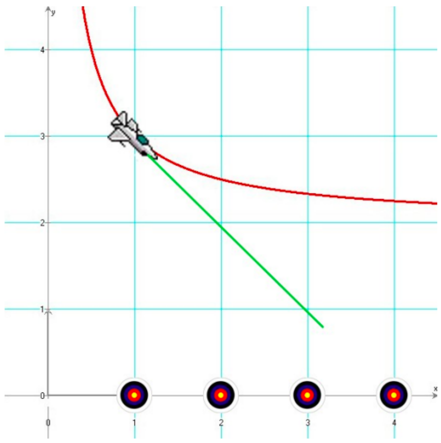
Pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n+1} - 13\,636{,}363\,64 - (80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n} - 13\,636{,}363\,64)$$
$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n+1} - 13\,636{,}363\,64 - 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n} + 13\,636{,}363\,64$$
$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n+1} - 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n}$$
$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n} \times 1{,}005\,5 - 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n}$$
$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n} \times (1{,}005\,5 - 1)$$
$$p_{n+1} - p_n = 80\,836{,}363\,64 \times 1{,}005\,5^{n} \times 0{,}005\,5$$

On reconnaît le produit de trois nombres positifs.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} - p_n > 0$.
Ainsi la suite (p_n) est strictement croissante.

Exercice 4 — ★★★ : Jeu vidéo   *20 min*   (12 **pts**)

Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-dessous, on peut voir des avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et qui tirent au rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe $[Ox)$ aux abscisses 1, 2 , 3 et 4.



On sait que la trajectoire de l'avion correspond à la représentation graphique de la fonction

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

1. Le centre de la cible n° 4 sera-t-il touché si le joueur tire au moment où l'avion est en $(1\,;3)$?

L'équation de la tangente au point d'abscisse $(1\,;3)$ est donnée par : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Calculons $f'(1)$.

$\tau(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{1}{h} \times (f(1+h - f(1))$

- $f(1+h) = 2 + \dfrac{1}{1+h}$
- $f(1) = 2 + \dfrac{1}{1} = 3$
- $f(1+h) - f(1) = 2 + \dfrac{1}{1+h} - 3 = \dfrac{1}{1+h} - 1 = \dfrac{1-(1+h)}{1+h} = \dfrac{-h}{1+h}$

donc $\tau(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{1+h} = \dfrac{-1}{1+h}$

$\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = -1$

donc l'équation de la tangente est : $y = -1 \times (x-1) + 3 = -x + 4$

Le centre de la cible n° 4 est sur la tangente au point d'abscisse 1, si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente ; les coordonnées du centre de la cible sont $(4;0)$, et on a bien $0 = -4 + 4$.

On en déduit que le centre de la cible n° 4 sera touché si le joueur tire au moment où l'avion est en $(1\,;3)$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'abscisse de l'avion permettant d'atteindre le centre de la cible n° 3.

a) On appelle a l'abscisse de cet avion. Montrer qu'atteindre la cible n° 3 équivaut à résoudre l'équation

$$2a^2 + 2a - 3 = 0$$

.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $(a\,;f(a))$ est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Calculons $f'(a)$.

$\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{1}{h} \times (f(a+h - f(a))$

- $f(a+h) = 2 + \dfrac{1}{a+h}$
- $f(a) = 2 + \dfrac{1}{a}$
- $f(a+h) - f(a) = 2 + \dfrac{1}{a+h} - \left(2 + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \dfrac{-h}{a(a+h)}$

donc $\tau(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \dfrac{-1}{a^2}$

donc l'équation de la tangente est : $y = -\dfrac{1}{a^2} \times (x-a) + 2 + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a} + 2 + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} + 2$

sujet A : le centre de la cible n° 2 sera atteint si le point $(2\,;0)$ appartient à la tangente ; c'est à dire si :

$0 = -\dfrac{1}{a^2} \times 2 + \dfrac{2}{a} + 2 \Leftrightarrow 0 = -2 + 2a + 2a^2$

sujet B : le centre de la cible n° 3 sera atteint si le point $(3\,;0)$ appartient à la tangente ; c'est à dire si :

$0 = -\dfrac{1}{a^2} \times 3 + \dfrac{2}{a} + 2 \Leftrightarrow 0 = -3 + 2a + 2a^2$

b) En déduire l'abscisse de l'avion cherchée.

Il faut résoudre une équation du second degré et ne garder que la solution positive car $a > 0$.