Les 3 cercles / Théorème de Newton

Les 3 cercles

1. Etude de la configuration.

$\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B) et C(x_C ; y_C) et de rayons respectifs a, b et c.

D et E sont les points d'intersections de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_C$

F et G sont les points d'intersections de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$

H et I sont les points d'intersections de $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$

Construire les droites (DE), (FG) et (HI).

Emettre une conjecture.

2. Calculs dans un cas particulier.

$\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A(0 ;0), B(5 ;0) et C(0 ;3) et de rayons respectifs $a = 7$, $b = 3$ et $c = 5$.

Calculer les coordonnées de M point d'intersection de (DE) et (HI)

Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires.

Conclure.

3. Etude du cas général

$\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ et $\mathscr{C}_C$ de centres respectifs A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B) et C(x_C ; y_C) et de rayons respectifs a, b et c.

Donner l'expression des droites (DE), (FG) et(HI).

Trouver les coordonnées du point M intersections de (DE) et (FG), puis P de (FG) et (HI).

Evaluer $x_M - x_P$, puis $y_M - y_P$. Conclure.

Correction

1. les droites sont concourantes.

2. cas particulier

$\mathscr{C}_A : x^2 + y^2 = 49$ $\qquad$ $\mathscr{C}_B : (x-5)^2 + y^2 = 9$ $\qquad$ $\mathscr{C}_C : x^2 + (y-3)^2 = 25$

Coordonnées des points D, E, H, I.

D et E sont les points d'intersections de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_C$

```
algsys([Ca, Cc], [x, y])
```

donne D $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} ; \frac{11}{2}\right)$ et E $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} ; \frac{11}{2}\right)$ $\qquad$ donc (DE) : $y = \frac{11}{2}$

```
algsys([Ca, Cb], [x, y])
```

donne I $\left(\frac{13}{2} ; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et H $\left(\frac{13}{2} ; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad$ donc (HI) : $x = \frac{13}{2}$

donc M a pour coordonnées $\left(\frac{13}{2} ; \frac{11}{2}\right)$

`algsys([Cb, Cc], [x, y])` donne G (5 ; 3) et F $\left(\frac{40}{17} ; -\frac{24}{17}\right)$

d'où $\overrightarrow{GM}\left(\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{FM}\left(\frac{141}{34} ; \frac{235}{34}\right)$ (tester le calcul avec des fractions…)

$\frac{3}{2} \times \frac{235}{34} = \frac{705}{68}$ et $\frac{5}{2} \times \frac{141}{34} = \frac{705}{68}$

3. cas général

Démonstration : les calculs sont effectuésà l'aide du logiciel Maxima :

```
"equation des cercles"$
Ca:(x-xa)^2+(y-ya)^2-a^2$
Cb:(x-xb)^2+(y-yb)^2-b^2$
Cc:(x-xc)^2+(y-yc)^2-C^2$

"equation des droites d intersection"$
Dab:ratsimp(Ca-Cb);
Dbc:ratsimp(Cb-Cc);
Dca:ratsimp(Cc-Ca);

"coordonnées des intersections"$
linsolve([Dab,Dbc],[x,y]);
linsolve([Dbc,Dca],[x,y]);

"abscisse du point d'intersection de Dab et Dbc"$
part(%o12,1,2);

"abscisse du point d'intersection de Dba et Dca"$
```

Les 3 cercles / Théorème de Newton

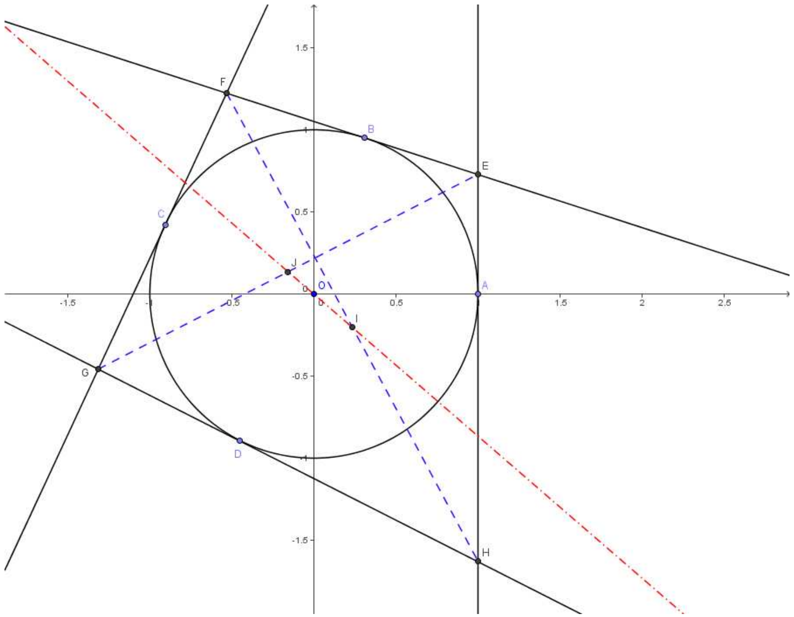
```
part(%o13,1,2);

"différence des abscisses"$
ratsimp(%o15-%o17);

"différences des ordonnées des points d'intersection de (Dab, Dbc)
et (Dbc, Dca)"$
ratsimp(part(%o12,2,2)-part(%o13,2,2));
```

Théorème de Newton

Etude de la configuration.



Le cercle inscrit à EFGH est tangent aux côtés en A, B, C et D
I et J sont les milieux respectifs de [EG] et [FH].

Correction

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives a, b, c et d.

Montrer que les points I, J, O sont alignés équivaut à montrer que $q = \frac{z_J}{z_I} = \frac{(\overline{a}+\overline{b})\,(\overline{c}+\overline{d})}{(\overline{b}+\overline{c})\,(\overline{a}+\overline{d})}$ est réel.

Il suffit de montrer que $n = (\overline{a}+\overline{b})\,(\overline{c}+\overline{d})\,(a+b)\,(c+d)$ est réel.

A l'aide du logiciel de calcul formel, définissons les variables :

```
a:cos(ta)+ %i*sin(ta)$
b:cos(tb)+ %i*sin(tb)$
c:cos(tc)+ %i*sin(tc)$
d:cos(td)+%i*sin(td)$
a_:conjugate(a)$
b_:conjugate(b)$
c_:conjugate(c)$
d_:conjugate(d)$
n:(a_+b_)*(c_+d_)*(b+c)*(a+d)
```

la fonction `imagpart` renvoie la partie imaginaire d'un complexe, la fonction `trigreduce` permet de réduire une somme comportant des fonctions trigonométriques…