Rencontre…

Compétences

- coordonnées du barycentre de 4 points (coordonnées du milieu de deux points)
- équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné ;
- équation d'un cercle connaissant le centre et un point ;
- trouver les racines d'un polynôme
- identifier les coefficients d'un polynôme
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique
- utiliser un grapheur pour trouver les valeurs approchées des racines d'un polynôme.

1. Expérimentation

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative d'une parabole et son axe de symétrie.
Construire ensuite un cercle quelconque qui coupe la parabole en 4 points distincts.
Placer l'isobarycentre de ces 4 points.
Recommencer avec d'autres cercles puis avec d'autres paraboles.
Quelle conjecture pouvez émettre ?

2. Étude de cas particuliers

2.1 Parabole et cercle donnés

Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre $E(-1 ; 5)$ et de rayon $5\sqrt{2}$.
Soient A, B, C et D les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$. Trouver leurs coordonnées.

A l'aide d'un grapheur, vous pourrez faire tracer la courbe de la fonction polynôme associée à l'équation afin de lire des valeurs approchées des solutions. N'oubliez pas de vérifier les résultats…

En déduire les coordonnées de G isobarycentre de A, B, C et D.
Vérifier que G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.2 Parabole et trois points donnés

Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(2 ; 4)$, $B(-4 ; 16)$ et $C(3 ; 9)$.

Calculer les coordonnées du centre du cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A ; B et C.

En déduire les coordonnées du point D, quatrième point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$.

Vérifier que le point G isobarycentre des points A, B, C et D appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.3 Parabole et trois points quelconques

Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(\alpha ; \alpha^2)$, $B(\beta ; \beta^2)$ et $C(\gamma ; \gamma^2)$.

Calculer les coordonnées du centre du cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A ; B et C en fonction de α, β et γ.

En admettant son existence, montrer que δ (abscisse du point D, quatrième point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$) vérifie $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

En déduire que le point G isobarycentre des points A, B, C et D appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

Rencontre…

1. Expérimentation

l'isobarycentre appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2. Étude de cas particuliers

2.1 Parabole et cercle donnés

Équation de $\mathscr{C}$: $(x+1)^2 + (y-5)^2 = (5\sqrt{2})^2$ (*)

Points d'intersection

on a $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ donc (*) devient : $(x+1)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right)^2 = 50$

Posons $f(x) = (x+1)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right)^2 - 50$ et cherchons les racines de ce polynôme.

Nous savons que f est un polynôme de degré 4 : nous devons trouver au plus 4 racines.
Grâce à une lecture graphique on trouve : $\alpha = -6$; $\beta = 0$; $\gamma = 4$ et $\delta = 6$.
(Vérifier en calculant les images de ces nombres).

pour les ceux qui veulent calculer…
en remarquant que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
(*) devient
$\frac{1}{16}x^4 \quad -\frac{1}{4}x^3 \quad -\frac{9}{4}x^2 + 9x = 0$
$x(x^3 - 4x^2 - 36x + 144) = 0$
4 est une racine… on factorise en identifiant les coefficients…

donc les 4 points sont les suivants : $A(-6 ; 10)$ $B(0 ; -2)$ $C(4 ; 0)$ $D(6 ; 4)$

les coordonnées de G sont $\left(\frac{-6+0+4+6}{4} ; \frac{10-2+0+4}{4}\right) = (1 ; 3)$

l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 1$

donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.2 Parabole et trois points donnés

Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC].

Équation de (AC) : $y = \frac{9-4}{3-2}(x-2) + 4 = 5(x-2) + 4$

(AC) : $y = 5x - 6$ et (AB) : $y = -2x + 8$

Équation des médiatrices

$\Delta_{AC} : y = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 5 \times \frac{5}{2} - 6$ $\quad y = -\frac{1}{5}x + 7$ $\quad \Delta_{AB} : y = \frac{1}{2}x + \frac{21}{2}$

coordonnées du centre

on cherche x_Ω tel que : $-\frac{1}{5}x_\Omega + 7 = \frac{1}{2}x_\Omega + \frac{21}{2}$ donc $x_\Omega = -5$ et $y_\Omega = 8$

Équation du cercle

$(x-(-5))^2 + (y-8)^2 = (2-(-5))^2 + (4-8)^2$ $\quad (x+5)^2 + (y-8)^2 = 65$

Intersection avec $\mathscr{P}$

on a $y = x^2$, donc on cherche x tel que : $(x+5)^2 + (x^2 - 8)^2 = 65$
$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$
-1 est racine, les autres sont évidemment 2, -4 et 3.

Calcul de l'abscisse de G

$x_G = \frac{-1+2-4+3}{4} = 0$

donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.3 Parabole et trois points quelconques

Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC].

Équation de (AC) : $y = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma - \alpha}(x-2) + 2^2 = (3+2)(x-2) + 2^2$

(AC) : $y = (\alpha + \gamma)x - \alpha\gamma$ et (AB) : $y = (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$

Rencontre…

Équation des médiatrices

$\Delta_{AC} : y = -\dfrac{1}{\alpha + \gamma}\left(x - \dfrac{\alpha + \gamma}{2}\right) + (\alpha + \gamma)\dfrac{\alpha + \gamma}{2} - \alpha\gamma \qquad y = -\dfrac{1}{\alpha + \gamma}x + \dfrac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$

$\Delta_{AB} : y = -\dfrac{1}{\alpha + \beta}x + \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}$

coordonnées du centre

on cherche x_Ω tel que

$$-\frac{1}{\alpha + \gamma}x_\Omega + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2} = -\frac{1}{\alpha + \beta}x_\Omega + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\alpha + \gamma}\right)x_\Omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$$

$$x_\Omega = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}{\gamma - \beta} \times \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2}$$

$$x_\Omega = -\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma - \alpha)}{2}$$

et $y_\Omega = -\dfrac{1}{\alpha + \gamma}x_\Omega + \dfrac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$

$$y_\Omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1}{2}$$

Équation du cercle

$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = (2 - x_\Omega)^2 + (2^2 - y_\Omega)^2$

Intersection avec $\mathscr{P}$

on a $y = x^2$

donc on cherche x tel que : $(x - x_\Omega)^2 + (x^2 - y_\Omega)^2 = (\alpha - x_\Omega)^2 + (\alpha^2 - y_\Omega)^2$

$x^4 + (1 - 2y_\Omega)x^2 - 2x_\Omega x - (\alpha^4 + (1 - \alpha y_\Omega)\alpha^2 - 2\alpha x_\Omega) = 0$

Soit $P(x) = x^4 + (1 - 2y_\Omega)x^2 - 2x_\Omega x - (\alpha^4 + (1 - 2y_\Omega)\alpha^2 - 2\alpha x_\Omega)$

or on admet que α, β, γ et δ sont les racines de P,

donc $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$

$P(x) = x^4 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + Q(x) \qquad Q$ polynôme de degré 2

en identifiant les coefficients :

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$

Calcul de l'abscisse de G

$x_G = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} = 0$

donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.