

Compétences

- coordonnées du barycentre de 4 points (coordonnées du milieu de deux points)
- équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné ;
- équation d'un cercle connaissant le centre et un point ;
- trouver les racines d'un polynôme
- identifier les coefficients d'un polynôme
- utiliser un logiciel de géométrie dynamique
- utiliser un grapheur pour trouver les valeurs approchées des racines d'un polynôme.

1. Expérimentation

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative d'une parabole et son axe de symétrie.

Construire ensuite un cercle quelconque qui coupe la parabole en 4 points distincts.

Placer l'isobarycentre de ces 4 points.

Recommencer avec d'autres cercles puis avec d'autres paraboles.

Quelle conjecture pouvez émettre ?

2. Étude de cas particuliers

2.1 Parabole et cercle donnés

Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ et \mathcal{C} le cercle de centre $E(-1 ; 5)$ et de rayon

$$5\sqrt{2}.$$

Soient A, B, C et D les points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{P} . Trouver leurs coordonnées.

A l'aide d'un grapheur, vous pourrez faire tracer la courbe de la fonction polynôme associée à l'équation afin de lire des valeurs approchées des solutions. N'oubliez pas de vérifier les résultats...

En déduire les coordonnées de G isobarycentre de A, B, C et D .

Vérifier que G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.2 Parabole et trois points donnés

Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(2 ; 4)$, $B(-4 ; 16)$ et $C(3 ; 9)$.

Calculer les coordonnées du centre du cercle \mathcal{C} passant par les points $A ; B$ et C .

En déduire les coordonnées du point D , quatrième point d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{C} .

Vérifier que le point G isobarycentre des points A, B, C et D appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.3 Parabole et trois points quelconques

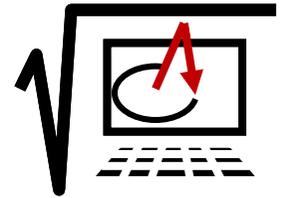
Vous pourrez vérifier vos calculs à l'aide du logiciel de géométrie s'il le permet.

Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(\alpha ; \alpha^2)$, $B(\beta ; \beta^2)$ et $C(\gamma ; \gamma^2)$.

Calculer les coordonnées du centre du cercle \mathcal{C} passant par les points $A ; B$ et C en fonction de α, β et γ .

En admettant son existence, montrer que δ (abscisse du point D , quatrième point d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{C}) vérifie $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

En déduire que le point G isobarycentre des points A, B, C et D appartient à l'axe de symétrie de la parabole.



1. Expérimentation

l'isobarycentre appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2. Étude de cas particuliers

2.1 Parabole et cercle donnés

Équation de \mathcal{C} : $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (5\sqrt{2})^2$ (*)

Points d'intersection

on a $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ donc (*) devient : $(x + 1)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right)^2 = 50$

Posons $f(x) = (x + 1)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right)^2 - 50$ et cherchons les racines de ce polynôme.

Nous savons que f est un polynôme de degré 4 : nous devons trouver au plus 4 racines.

Grâce à une lecture graphique on trouve : $\alpha = -6$; $\beta = 0$; $\gamma = 4$ et $\delta = 6$.

(Vérifier en calculant les images de ces nombres).

pour les ceux qui veulent calculer...

en remarquant que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

(*) devient

$$\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 9x = 0$$

$$x(x^3 - 4x^2 - 36x + 144) = 0$$

4 est une racine... on factorise en identifiant les coefficients...

donc les 4 points sont les suivants : $A(-6 ; 10)$ $B(0 ; -2)$ $C(4 ; 0)$ $D(6 ; 4)$

les coordonnées de G sont $\left(\frac{-6 + 0 + 4 + 6}{4} ; \frac{10 - 2 + 0 + 4}{4}\right) = (1 ; 3)$

l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 1$

donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.2 Parabole et trois points donnés

Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Équation de (AC) : $y = \frac{9-4}{3-2}(x-2) + 4 = 5(x-2) + 4$

(AC) : $y = 5x - 6$ et (AB) : $y = -2x + 8$

Équation des médiatrices

$$\Delta_{AC} : y = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 5 \times \frac{5}{2} - 6 \quad y = -\frac{1}{5}x + 7 \quad \Delta_{AB} : y = \frac{1}{2}x + \frac{21}{2}$$

coordonnées du centre

on cherche x_Ω tel que : $-\frac{1}{5}x_\Omega + 7 = \frac{1}{2}x_\Omega + \frac{21}{2}$ donc $x_\Omega = -5$ et $y_\Omega = 8$

Équation du cercle

$$(x - (-5))^2 + (y - 8)^2 = (2 - (-5))^2 + (4 - 8)^2 \quad (x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 65$$

Intersection avec \mathcal{P}

on a $y = x^2$, donc on cherche x tel que : $(x + 5)^2 + (x^2 - 8)^2 = 65$

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$$

-1 est racine, les autres sont évidemment 2, -4 et 3.

Calcul de l'abscisse de G

$$x_G = \frac{-1 + 2 - 4 + 3}{4} = 0$$

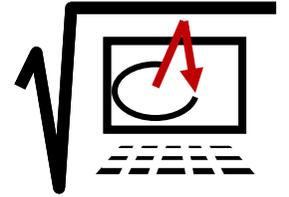
donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.

2.3 Parabole et trois points quelconques

Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Équation de (AC) : $y = \frac{\gamma - \alpha^2}{\gamma - \alpha}(x - 2) + 2^2 = (3 + 2)(x - 2) + 2^2$

(AC) : $y = (\alpha + \gamma)x - \alpha\gamma$ et (AB) : $y = (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$



Équation des médiatrices

$$\Delta_{AC} : y = -\frac{1}{\alpha + \gamma} \left(x - \frac{\alpha + \gamma}{2} \right) + (\alpha + \gamma) \frac{\alpha + \gamma - \alpha \gamma}{2} \quad y = -\frac{1}{\alpha + \gamma} x + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$$

$$\Delta_{AB} : y = -\frac{1}{\alpha + \beta} x + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}$$

coordonnées du centre

on cherche x_Ω tel que

$$-\frac{1}{\alpha + \gamma} x_\Omega + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2} = -\frac{1}{\alpha + \beta} x_\Omega + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\alpha + \gamma} \right) x_\Omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$$

$$x_\Omega = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)}{\gamma - \beta} \times \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2}$$

$$x_\Omega = -\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma - \alpha)}{2}$$

$$\text{et } y_\Omega = -\frac{1}{\alpha + \gamma} x_\Omega + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}{2}$$

$$y_\Omega = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1}{2}$$

Équation du cercle

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = (2 - x_\Omega)^2 + (2 - y_\Omega)^2$$

Intersection avec \mathcal{P}

on a $y = x^2$

donc on cherche x tel que : $(x - x_\Omega)^2 + (x^2 - y_\Omega)^2 = (\alpha - x_\Omega)^2 + (\alpha^2 - y_\Omega)^2$

$$x^4 + (1 - 2y_\Omega)x^2 - 2x_\Omega x - (\alpha^4 + (1 - \alpha y_\Omega)\alpha^2 - 2\alpha x_\Omega) = 0$$

Soit $P(x) = x^4 + (1 - 2y_\Omega)x^2 - 2x_\Omega x - (\alpha^4 + (1 - 2y_\Omega)\alpha^2 - 2\alpha x_\Omega)$

or on admet que α, β, γ et δ sont les racines de P ,

donc $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$

$P(x) = x^4 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + Q(x)$ Q polynôme de degré 2

en identifiant les coefficients :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

Calcul de l'abscisse de G

$$x_G = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} = 0$$

donc G appartient à l'axe de symétrie de la parabole.