CONCOURS E.S.I.E.E. 2007

Epreuve de Mathématiques

Durée 2 heures

---

1. Soit X, Y et Z trois ensembles non vide de réels.

Sachant que

- Aucun élément de X n'est négatif
- Aucun élément de Y n'admet de racine carrée réelle
- Tout élément de Z est supérieur ou égal à 1

on peut en déduire :

(A) Aucun élément de X n'appartient à Y
(B) Aucun élément de Z n'appartient à Y
(C) Tout réel qui n'appartient pas à Y appartient à X
(D) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z il faut qu'il soit positif
(E) Pour qu'un réel appartienne à X et à Z il suffit qu'il soit supérieur ou égal à 1

---

2. On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x - 1 \qquad g(x) = \frac{x \ln x}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \quad g(1) = 1$$

Alors :

(A) Pour tout $x \in]0,+\infty[, \quad f(x) \geqslant 0$
(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
(C) g est continue en 1
(D) g est croissante sur $]0,+\infty[$
(E) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

---

3. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x+1)$

Alors :

(A) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
(C) f est croissante sur $[1,+\infty[$
(D) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1,+\infty[$
(E) L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $]-1,+\infty[$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x - x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = 4 - x + 2x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Alors :

(A) f est continue en 0
(B) f est dérivable en 0
(C) f est décroissante sur $]-\infty, 0]$
(D) Pour tout $a \in]-1, 0[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$
(E) L'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$

---

5. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.
Alors :

(A) f est décroissante sur $]-\infty, -1]$
(B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$
(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + x \right] = 1$
(D) La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$
(E) La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

---

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - x + 1$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.
Alors :

(A) Il existe un unique $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$
(B) f est décroissante sur $]-\infty, -1[$
(C) Pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
(D) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 2$
(E) La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$

---

7. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $f(0) = 0$.

Alors :

(A) Nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
(B) Nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2x \right] = 0$
(C) Nécessairement , il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [M, +\infty[\quad f(x) > 0$
(D) f peut être définie par $f(x) = 2x + \sin x$
(E) f peut être définie par $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

8.

(A) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad e^{x+2} = e^x + e^2$

(B) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0$

(C) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \left(e^x\right)^2 = e^{2x}$

(D) Pour tout $x > 0$ $\quad e^{x \ln x} = x^x$

(E) Pour tout $x > 0$ $\quad e^{1-x} - e^{-x} < 0$

---

9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(A) $(5x+3)(2x+1) - (2-x)(1-5x) - 3(1-x) = 5x^2 + 18x - 2$

(B) $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(x-5)(x+4)}{2} = \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} - \dfrac{20}{3}$

(C) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors $\dfrac{x^2 - x - 2}{\dfrac{x-1}{x-2}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

(D) Si $x \neq 1$ et $x \neq 2$ alors $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$

(E) Si $x \neq 1$ alors $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1} - 4}{x-1} = -3x + 7$

---

10. Soit $f(x) = 1 - 3x + x^2$ et $g(x) = \dfrac{x}{1 - 3x + x^2}$.

Alors pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$:

(A) $-1 \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{1}{4}$

(B) $-\dfrac{5}{4} \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{1}{4}$

(C) $-x \leqslant f(x) \leqslant x$

(D) $g(x) \geqslant -1$

(E) $g(x) \leqslant -\dfrac{4}{5} x$

---

11. Soit *a*, *b* et *c* trois réels

(A) Si $a > 0$ alors $\dfrac{a + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a}\, b$

(B) Si $a > c$ alors $b - a > b - c$

(C) Si $\dfrac{a+b}{2} < c < b$ alors $a < c$

(D) Si $ac < b$ et $a + b < c$ alors $a < c$

(E) Si $0 < c - a < b - c$ alors $4c^2 \leqslant (a+b)^2$

12. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = -28$.
Alors :

(A) $u_6 = 2$
(B) Il existe un entier m tel que $u_m > m$
(C) Il existe un et un seul entier n tel que $u_n u_{n+1} < 0$
(D) Il existe un entier p tel que $u_p = 2007$
(E) Il existe un entier k tel que $u_1 + u_k = 2007$

---

13. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n{}^2 + 3}{2\sqrt{3}}$

on a :

(A) (u_n) est croissante
(B) (u_n) est majorée
(C) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
(D) Il existe $p \in \mathbb{N},\ u_p = \sqrt{3}$
(E) Il existe $k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant \sqrt{k}$

---

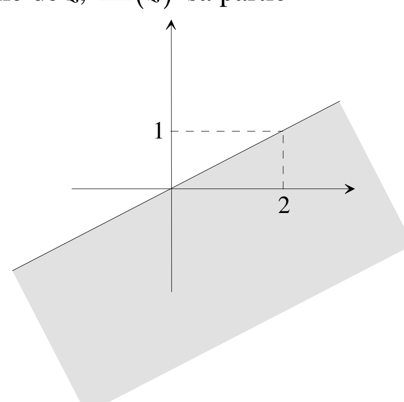
14. Pour tout nombre complexe z, $\arg(z)$ désigne l'argument de z.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z. On pose $Z = \dfrac{z-i}{z-1}$

(A) L'ensemble des point M tels que Z soit réel est une droite
(B) L'ensemble des point M tels que $|Z| = 1$ est un cercle
(C) L'ensemble des point M tels que $Z\overline{Z} = 4$ est une droite
(D) L'ensemble des point M tels que $\arg(Z) = 0$ modulo π est un cercle
(E) L'ensemble des point M tels que $Z - \overline{Z} = 0$ est une droite

---

15. Pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z, $\operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire. Dans le plan complexe on considère le demi-plan grisé Π ci-contre, droite incluse.
Π est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que :



(A) $\operatorname{Im}(z) \leqslant \operatorname{Re}((1+i)z)$
(B) $\operatorname{Im}(z) \leqslant \operatorname{Im}((1+i)\overline{z})$
(C) $|z-5| \leqslant |z-3-4i|$
(D) $|z+4-3i| \leqslant |z+5i|$
(E) $|z-1+2i| \leqslant |z+1-2i|$

16. On considère six plaques numérotées de 1 à 6. Chacune des deux faces d'une plaque est peinte d'une seule couleur choisie parmi les quatre couleurs suivantes :
Noire, Rouge, Vert et Jaune (respectivement notées sur le dessin N, R, V et J).

R	V	N	N	R	J
1	2	3	4	5	6

On dispose ces six plaques sur une table (une seule face est donc apparente) :

On peut retourner une ou plusieurs plaques et dans ce dernier cas, les plaques sont retournées simultanément.
On considère les énoncés :

P : Si une plaque a une face rouge alors son autre face est verte
Q : Pour qu'une plaque ait une face noire il suffit qu'elle ait une face jaune

(A) Pour savoir si P est vrai il suffit de retourner les plaques 1, 2, 5
(B) Pour savoir si P est vrai il faut retourner les plaques 1, 2, 5
(C) Pour savoir si P est vrai il faut retourner les plaques 1, 3, 4, 5, 6
(D) Pour savoir si Q est vrai il faut retourner la plaque 6
(E) Pour savoir si Q est vrai il suffit de retourner la plaque 6

---

17. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la droite Δ d'équation $2x-y+2=0$ et le point $I(1,1)$
Alors :

(A) $H(0,2)$ est le projeté orthogonal de I sur Δ
(B) $J(-1,3)$ est le symétrique de I par rapport à Δ
(C) La distance de I à Δ est égale à $\frac{6}{5}\sqrt{5}$
(D) La perpendiculaire à Δ passant par I a pour équation $x+2y-3=0$
(E) Soit $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $K(3,0)$, le triangle LIK est rectangle

---

18. Dans l'espace, on considère deux droites Δ et Δ' non coplanaires (c'est-à-dire non contenues dans un même plan).
Soit M et N deux points distincts de Δ, on a :

(A) Il existe un unique point $M'\in\Delta'$ tel que la droite (MM') soit perpendiculaire à Δ'
(B) Il existe une unique droite passant par N et parallèle à Δ'
(C) Il existe deux points distincts M' et N' de Δ' tels que $MNN'M'$ soit un rectangle
(D) Il existe deux points distincts P' et Q' de Δ' tels que $\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{P'Q'}=\vec{0}$
(E) Il existe un unique point $R'\in\Delta'$ tel que pour tout point $S'\in\Delta'$ $\overrightarrow{MR'}\bullet\overrightarrow{R'S'}=0$

19. La durée de vie d'un mixeur, exprimée en année, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.
Alors :

(A) $P(X > 6) = e^{-0,6}$

(B) $P(X \leqslant 5) = P(X \geqslant 5)$

(C) L'espérance de X est égale à 10

(D) $P(X \leqslant 6 / X \geqslant 2) = P(X \leqslant 4)$

(E) $P(X \geqslant 6 / X \geqslant 2) = P(X \geqslant 4)$

---

20. Un sondage auprès des Terminales du lycée Chanson donne les résultats suivants :

65% de ces Terminales regardent la Star Academy,
Parmi les Terminales regardant la Star Academy, 40% sont en Terminale S
Parmi les Terminales ne regardant pas la Star Academy, 20% sont en Terminale S

On interroge au hasard un élève de Terminale du lycée Chanson.
On note SA l'événement l'élève interrogé regarde la Star Academy
TS l'évènement l'élève interrogé est en Terminale S
alors :

(A) $P(SA \cap TS) = \dfrac{2}{5}$

(B) $P\left(\overline{TS} / \overline{SA}\right) = \dfrac{4}{5}$

(C) $P\left(\overline{TS} / SA\right) = \dfrac{3}{5}$

(D) $P\left(TS \cap \overline{SA}\right) = \dfrac{3}{5}$

(E) $P(TS) = \dfrac{33}{100}$