*

Objectifs

- Construire une figure à la règle et au compas en suivant un algorithme ;
- Construire une figure à l'aide d'un logiciel en suivant un algorithme ;
- Adapter l'algorithme en fonction des possibilités du logiciel afin d'obtenir rapidement un grand nombre de figures correspondant à l'algorithme initial.
- Conjecturer la « véracité » (fiabilité ?) d'un algorithme.

Compétences

➔ Trigonométrie du triangle rectangle (collège)
➔ Distance de deux points du plan
➔ Équations de droites
➔ Coordonnées d'un vecteur dans un repère
➔ Produit d'un vecteur par un nombre réel
➔ Égalité de deux vecteurs

algo

PENTA, HEPTA, ÉNA, ENDÉCA ET LES AUTRES

Un bel algorithme

Voici un algorithme permettant de construire des polygones réguliers à n côtés.

- construire le cercle **C** de diamètre [AA’] et de centre O.
- soit P un des points d’intersection des cercles de centre A et de rayon AA’ et de centre A’ et de rayon AA’.
- diviser le segment [AA’] en n parties égales ; soit Q tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{n}\overrightarrow{AA'}$.
- la droite (PQ) coupe **C** en B de telle sorte que les points P, Q et B soient alignés dans cet ordre.
- [AB] est un côté du n-gone : reporter ce segment (n – 1) fois sur le cercle **C**.

1. Papier, crayon, règle et compas

A l’aide de l’algorithme, construire sur une feuille blanche un pentagone régulier, un hexagone régulier, puis un heptagone régulier (AA’ = 14 cm)

remarque
Rappeler ou non le théorème de Thalès pour découper un segment en n *parties égales…*

2. Écran, clavier et souris

- construire le pentagone à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique,
- adapter la construction précédente afin de pouvoir obtenir un polygone avec un nombre de côtés variant de 3 à 20.
- rédiger une remarque pertinente concernant cet algorithme…

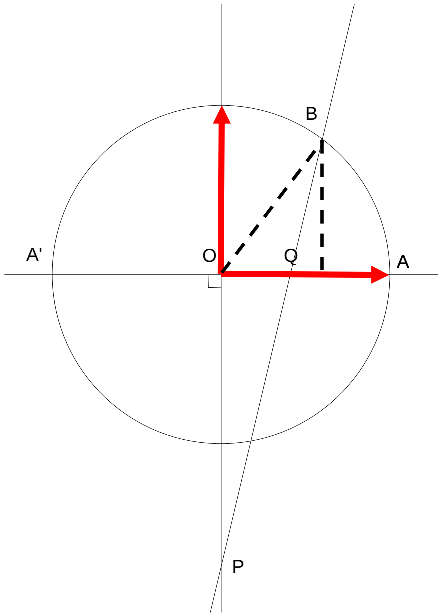
remarque
Utiliser les vecteurs pour placer le point Q
(et utiliser éventuellement la notation $Q = \frac{2}{n}(A' - A) + A$*)*

3. Papier, crayon, neurones

Reprenons l’hexagone construit à l’aide de cet algorithme et plaçons le dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dans ce repère donner les coordonnées des points A, A’, P et Q.
   Supposons que l’hexagone soit bien un hexagone régulier : quelle devrait être l’abscisse de B ?
2. Donner une équation du cercle **C** de diamètre [AA’], et une de la droite (PQ).
3. B étant l’intersection **C** et [PQ], quelle équation doit vérifier son abscisse ?
4. Conclure.

remarque
suivant la classe : donner la figure avec ou sans le repère, avec l’abscisse de B *en positif ou négatif…*
Pour faciliter le travail utiliser le repère suivant :



Prolongements
(1) 1S (ou fin d’année de 2^nde avec forme canonique pour factoriser l’équation du second degré ? ou bien utiliser Xcas pour obtenir les racines ?)
Effectuer le même travail pour démontrer que le pentagone n’est pas régulier.
(2) Donner la construction exacte du pentagone régulier.

Entre nous

Pré-requis

- Trigonométrie de collège pour trouver l'abscisse de B.
- Aide pour trouver une équation du cercle.
- Connaître la notion de vecteur.

Objectifs

- Faire découvrir une méthode originale pour construire des polygones presque réguliers à la règle et au compas.
- Tester un algorithme avec différents outils (papier, logiciel, algèbre).
- Découvrir les limites d'un algorithme à l'aide de l'outils informatique (à partir du décagone, ce qui ne vois pas forcément à la main : problème de précision des outils)

Prolongement

- Donner l'algorithme de construction du pentagone régulier.
- Démontrer que l'algorithme est faux pour le pentagone.

Logiciels conseillés

- Pour construire les 3 première figures, Geogebra semble plus convivial, mais pour passer au cas général je conseille Xcas. Je ne connais pas assez les possibilités de Géoplan (Geogebra est plutôt « souris » et Xcas « clavier »).
  (A l'aide du tableur de Geogebra on peut construire les sommets du n-gones, mais parfois cela « buggue » : les intersections de cercles sont mal gérées et le temps de recalcul du tableur est assez long)
- Avec les logiciels, pour placer le point Q ne pas utiliser « un découpage à la Thalès » mais utiliser les vecteurs (avec les coordonnées ou la notation $Q = \frac{2}{n}(A' - A) + A$)

Évaluation

En informatique j'ajuste en fonction du nombre d'aide données (points négatifs) et du nombre d'initiatives heureuses (points positifs). Je ne sanctionne pas une méconnaissance des commandes spécifiques au logiciel pour accomplir une tâche particulière et je valorise une lecture volontaire de l'aide du logiciel ou d'un exemple (travail autonome).
Il faut que l'activité proprement logiciel soit prévue pour 40 minutes maximum.

exemple

Ce devoir peut être réalisé en 3 temps distincts : un préparation des figures papiers à la maison ; en classe une partie informatique ; puis une partie démonstration.

les figures à la règle et au compas respectent l'algorithme :	points
pentagone	3
hexagone	3
heptagone	3
le pentagone construit à l'aide du logiciel est correcte (preuve ; bouger le point A et observer…)	prévoir 3
exposition d'une idée de généralisation (avoir un paramètre n afin de définir Q)	prévoir 1
mise en œuvre de cette idée (création d'une liste de sommets)	prévoir 4
conjecture (faire varier le paramètre)	prévoir 2
démonstration	7

16 points « papier » + 10 points « écran ».

Correction

1. Papier, crayon, règle et compas

3 points par figure (soin, découpage des segments, précision)

2. Écran, clavier et souris

Code Xcas :	remarques
`A:=point(1,0) ;` `A1:=point(-1,0) ;`	Définitions des points par leurs coordonnées

`C:=cercle(A,A1) ;`
`c1:=cercle(A,A1-A) ;`
`c2:=cercle(A1,A1-A) ;`
	si les points `A1` et `A` ont pour affixes respectives z_1 et z, alors `A1-A` est le vecteur d'affixe $z_1 - z$.

`P:=(inter(c1,c2))[1] ;`	le `[1]` indique le choix entre les deux intersections possibles
`n:=element(2 .. 20,2.0,1.0) ;`	`n` appartient à l'ensemble [2 ; 20], sa valeur initiale est 2 et on incrémente de 1 en 1
`Q:=point(2/n*(A1-A)+A) ;`	$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{n}\overrightarrow{AA_1}$, avec la notation (venant des complexes) : `Q - A =` $\frac{2}{n}$ `(A' - A)`, d'où `Q =`
`B:=(inter(droite(P,Q),C))[0] ;`	le `[0]` indique le choix entre les deux intersections possibles
`poly:=A,B ;`	poly est une liste de points ; les éléments d'une liste sont séparés par des virgules.

`pour j de 2 jusque n faire`
`poly:=poly,(inter(C,cercle(poly[j-1],B-A)))[1]`
` fpour;) ;`
	on trace des cercles de rayon AB, les centres successifs sont éléments de `poly`.

`polygone(poly) ;`	on trace le polygone de sommets les points de la liste `poly` (les sommets crées n'ont pas de nom)
`Z:=poly[n] ;`	on nomme `Z` le dernier sommet de la liste `poly` pour vérifier s'il coïncide avec `A`.

3. Papier, crayon, neurones

1. A(1 ; 0) et A'(– 1 ; 0)

<u>coordonnées de P</u>

le triangle OAP est rectangle en O avec OA = 1 et AP = 2 (par construction)

d'après le théorème de Pythagore :

$OP = \sqrt{3}$.

$P(0\ ;-\sqrt{3})$

<u>coordonnées de B</u>

B devrait avoir pour abscisse $x_B = \frac{1}{2}$ (cos 60°) : $B\left(\frac{1}{2}\ ;0\right)$

<u>coordonnées de Q</u>

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AA'}$

$$\begin{cases} x_Q - x_A = \frac{1}{3}(x_{A'} - x_A) \\ y_Q - y_A = \frac{1}{3}(y_{A'} - y_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{3}(-1-1) + 1 = \frac{1}{3} \\ y_Q = 0 \end{cases} \qquad Q\left(\frac{1}{3}\ ;0\right)$$

2. un point M(x ;y) appartient à **C** si et seulement si $OM^2 = 1$

or $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

d'où $x^2 + y^2 = 1$

(PQ) a pour équation : $y = 3\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

<u>**3.** intersection</u>

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 3\sqrt{3}\,x - \sqrt{3} \end{cases}$$

donc il faut l'abscisse de B doit vérifier :

$x^2 + (3\sqrt{3}\,x - \sqrt{3})^2 = 1$

$28x^2 - 18x + 2 = 0$

$14x^2 - 9x + 1 = 0$

<u>**4.** conclusion</u>

L'abscisse de B doit vérifier l'équation :

or $14 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$

donc $x_B = \frac{1}{2}$ et mes $\widehat{AOB} = 60°$

la construction est exacte !

1.
P 1
B 0,5
Q 1

2.
eq **C** 1
(PQ) 1,5

3.
eq 1

4.
verif 0,5
concl 0,5

Prolongement : pentagone

1. A(1 ; 0) et A'(– 1 ; 0)

coordonnées de Q

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AA'}$

$\begin{cases} x_Q - x_A = \frac{2}{5}(x_{A'} - x_A) \\ y_Q - y_A = \frac{2}{5}(y_{A'} - y_A) \end{cases}$

$\begin{cases} x_Q = \frac{2}{5}(-1-1) + 1 = \frac{1}{5} \\ y_Q = 0 \end{cases}$ $Q\left(\frac{1}{5} ; 0\right)$

2.

(PQ) a pour équation : $y = 5\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

3. intersection

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 5\sqrt{3}\,x - \sqrt{3} \end{cases}$

donc il faut l'abscisse de B doit vérifier :

$x^2 + (5\sqrt{3}\,x - \sqrt{3})^2 = 1$

$76\,x^2 - 30\,x + 2 = 0$

$38\,x^2 - 15\,x + 1 = 0$

4. conclusion

deux racines : $\frac{15 - \sqrt{73}}{76} \simeq 0{,}08$

et $\frac{15 + \sqrt{73}}{76} \simeq 0{,}3$

on choisit : $x_B = \frac{15 + \sqrt{73}}{76}$

d'où mes $\widehat{AOB} \simeq 71{,}95° \neq 72°$

la construction est fausse !

6 points

1. Q 1

2. (PQ) 1,5

3. eq 1

4. racines 1,5 concl 1