Calcul formel

1. Utilisation

Simplifier le calcul algébrique / Calculer avec les nombres complexes / Résoudre des systèmes d'équations / Développer – factoriser des expression / Décomposer en produit des facteurs premier / Caculer avec fractions…

2. Les logiciels

Deux logiciels de calculs formels, gratuits et téléchargeables.
Pour les deux, il existe des forums très réactifs sur lesquels on peut librement poser des questions, il existe également une documentation assez complète en français !

Maxima

Le logiciel Maxima : . http://maxima.sourceforge.net/
et son interface graphique : http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page
pour des fichiers d'aide : http://michel.gosse.free.fr/
L'auteur est très réactif !

XCas

le logiciel XCas : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr#xcaswin
(l'interface graphique est déroutante au début…)
XCas en ligne : http://xcasenligne.fr/
pour les fichiers d'aide : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html
L'auteur est très réactif !

Pour ce stage, j'ai une préférence pour XCas…
mais il est intéressant de jongler entre les deux : les algorithmes de calculs étant différents, certaines réponses seront plus faciles à obtenir avec l'un ou l'autre.

Remarques

- pour la multiplication, le symbole * ne peut pas être omis
- sous Windows, les raccourcis clavier Ctrl-C, Ctrl-V permettent respectivement de copier et coller la sélection.

Quelques commandes

Répondre aux questions suivantes en utilisants les commandes du logiciel trouvées dans les menus *scolaire* ou dans le menu *aide > index*.
Les commandes existent en français et en anglais pour voir les synonimes : menu *Aide > index*

pour le calcul

pour obtenir A il faut taper : `2/5 + 1/4 = 13/20`

pour obtenir B il faut taper : `2/5 - 1/4 = 3/20`

pour obtenir C

on peut affecter à la variable **a** l'expression $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ en écrivant : `a :=2/5+1/4`

en affectant à la variable **b** l'expression $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$, on peut obtenir C en tapant `a/b`

pour obtenir D il faut taper : `(2^3)^2 = 64`
le résultat n'est pas celui attendu, pour obtenir D sous forme de puissance d'un nombre premier : `ifactor` : `ifactor(ans()) = 2^6`

pour E… il faut calculer « à la main »
mais pour F il suffit de taper en une ligne : `ifactor(5^26/5^17)`

pour obtenir G il faut taper : `5*sqrt(32)+sqrt(18)-5*sqrt(50)= - 2`$\sqrt{2}$
le résultat n'est pas celui attendu, pour obtenir une expression « normale » de G on utilise la commande `normal` ou `simplifier` ou le petit menu *M > normal* ou *M > simplifier*

pour développer H : `developper((x-4)^2-x*(x-10))`
pour obtenir une expression plus normale…

pour résoudre l'équation H = 16 : `solve((x-4)^2-x*(x-10)=16,x)`

pour factoriser I : `factoriser((7*x-3)^2-5^2)`

Calcul formel

pour résoudre l'équation I = 0 : **`solve((7*x-3)^2-5^2,x)`**

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$: **`csolve(z^2-2*sqrt(3)*z+4,z)`**

Brevet
Métropole - La Réunion - Mayotte juin 2009

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES 12 points

EXERCICE 1

1. Calculer A

$$A = \frac{8+3\times 4}{1+2\times 1,5}$$

2. Pour calculer A un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

8	+	3	×	4	÷	1	+	2	×
1	.	5	=						

Expliquer pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique342

Le menu *expression* permet de taper la séquence, elle est mise en forme avant d'être évaluée.
Si on veut mettre en forme sans évaluer, il suffit d'écrire l'expression entre quote simple : `'8+3*4/1+2*1.5'` ; pour l'évaluer on utilise le menu *M*.

en arithmétique

Pour obtenir le PGCD de 5 148 et 2 431 : **`gcd(5148,2431) = 143`**

Pour obtenir une fraction irréductible égale à $\frac{5\,148}{2\,431}$: **`5148/2431 = 36/17`**

Décomposer 2 008 en produits de facteurs premiers **`ifactor(2008) =`**
Donner le PPCM de 36 et 60 : **`lcm(36, 60) = 180`**

Calculs avec les complexes

Amérique du Sud

on nomme les variables pour faciliter le calcul :
`a := -1+2 * i   b :=1+3 * i c :=4 * i`

1. Pour montrer que le triangle est isocèle A il faut montrer que $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
pour obtenir $|z_B - z_A|$ il faut taper : **`abs(b-a)`**
pour obtenir $|z_C - z_A|$ il faut taper : **`abs(c-a)`**

2.a on obtient l'affixe de I : **`zi :=(a+b)/2`**
on définit z `:= x + i * y`
on calcule le quotient $\frac{z - z_I}{z - a}$ et on affecte le résultat à z_M: **`zm :=(z - zi)/(z-a)`**
on obtient l'expression algébrique de z_M avec la commande `evalc`.

2.c on obtient la partie réelle de z_M avec la commande `re` et donc la partie imaginaire en tapant : **`im(zm)`** pour avoir une expression plus « normale »…
l'affixe de $\overrightarrow{AI}$: **`zi-a`**

3. r_1 a pour expression : $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z + 3) - 3$; π s'obtient en écrivant `pi`.
on peut définir r_1 comme une fonction de z : **`r1(z):=exp(-i*pi/4)*(z+3)-3`**

4. On obtient a' en tapant : **`r1(a)`**
Si besoin `evalc` ou `normal`…
De même onpeut trouver b' et c'.
⚠ le symbole prime est affecté à ldérivée : nommer les points `a1` au lieu de `a'`.
pour obtenir le conjugué de c' : **`conj(c1)`**
pour comparer deux nombre : on étudie leur différence…

Calcul formel

les équations différentielles

Bac S, Métropole et Réunion, septembre 2008

la commande `desolve` permet de résoudre les équations différentielles :

$x\,f\,'(x) - (2\,x + 1)\,f(x) = 8\,x^2$

se résoud en tapant : `desolve(x*y'-(2*x+1)*y=8x^2,y)`

admet pour solution : $\dfrac{c_0\,x - 4\,x\,e^{-2\,x}}{e^{-2\,x}}$

de la même façon on trouve les solutions de l'équation : $y\,' = 2\,y + 8$

on peut préciser une condition initiale :

`desolve([x*y'-(2*x+1)*y=8x^2,y(ln(2))=0],y)`

les études de fonctions

Bac S, Polynésie, juin 2009

On définit la fonction **f** : `f(x) := x* exp(-x)/(x^2+1)`

1. la limite en + õ s'obtient en tapant : `limite(f(x),x,+infinity)`

2. On peut résoudre l'équation $g(x) = 0$: `solve(x^3+x^2+x-1,x)`

remarque : XCas donne une valeur approchée de la solution, Maxima propose 3 solutions (la réelle et les deux conjuguées en valeurs exactes…)

3. On obtient la dérivée de **f** en tapant : `f1(x) := deriver(f,x)`
   puis faire afficher l'expression de f1(x) en tapant : `f1(x)`
   un appel à la fonction `normal` montre que l'expression peut se factoriser par e^{-x} ; pour cela on tape : `factor(normal(f1(x)),exp(-x))`

4. la suite (u_n) se définie en tapant : `purge(n)` pour vider la variable `n` (au cas où elle contiendrait une valeur), puis : `u(n):=integrer(f(x),x,n,2*n)`
   On peut calculer quelques valeurs en tapant `u(1)` ou `u(2)`…
   la limite de la suite s'obtient en tapant : `limite(u(n),n,+infinity)`

3. Exemples

Coefficients du binôme

1. Développer « à la main » les expressions suivantes :
   $(a + b)^2 \quad (a + b)^3 \quad (a+ b)^4$
2. Développer à l'aide d'un logiciel de calcul formel les expressions $(a + b)^n$ pour **n** entier de 5 à 9
3. Recopier et compléter le tableau des coefficients des expressions obtenues :

n									
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4									
5									

4. En déduire une régle de calcul des coefficients
5. Completer les lignes pour **n** = 10 et **n** = 11. Vous pourrrez vérifier à l'aide du logiciel.
6. Démontrer cette formule…

Les trois cercles

1. Etude de la configuration.

$\mathbf{C}_A$, $\mathbf{C}_B$ et $\mathbf{C}_C$ de centres respectifs $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$ et $C(x_C\,;\,y_C)$ et de rayons respectifs **a, b** et **c**. D et E sont les points d'intersections de $\mathbf{C}_A$ et $\mathbf{C}_C$. F et G sont les points d'intersections de $\mathbf{C}_A$ et $\mathbf{C}_B$. H et I sont les points d'intersections de $\mathbf{C}_B$ et $\mathbf{C}_C$.

Construire les droites (DE), (FG) et (HI). Emettre une conjecture.

2. Calculs dans un cas particulier.

$\mathbf{C}_A$, $\mathbf{C}_B$ et $\mathbf{C}_C$ de centres respectifs A(0 ;0), B(5 ;0) et C(0 ;3) et de rayons respectifs **a** = 7, **b** = 3 et **c** = 5.

Calculer les coordonnées de M point d'intersection de (DE) et (HI)

Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires. Conclure.

3. Etude du cas général

Calcul formel

Brevet des collèges Amérique du Sud novembre 2009

Durée : 2 heures

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES **12 points**

Exercice 1

1. On pose

$A = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$; $B = \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$ et $C = \frac{A}{B}$.

Écrire le nombre C sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On pose $D = \left(2^3\right)^2$; $E = 4^5 \times 3^5$; $F = \frac{5^{26}}{5^{17}}$.

Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier chacun des nombres D, E et F.

3. On donne $G = 5\sqrt{32} + \sqrt{18} - 4\sqrt{50}$.

Écrire G sous la forme $a\sqrt{2}$.

Exercice 2

1. On pose $H = (x-4)^2 - x(x-10)$.

a. Développer et réduire H.

b. Résoudre l'équation $H = 16$.

2. On pose $I = (7x-3)^2 - 5^2$.

a. Factoriser I.

b. Résoudre l'équation $I = 0$.

Exercice 3

1. Déterminer le PGCD des nombres 5 148 et 2 431.

2. On pose $A = \frac{5148}{2431}$. Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\frac{z - z_I}{z - a}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\frac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. **a.** Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?

En déduire que $b' = \overline{c'}$.

Calcul formel

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E)\quad :\qquad xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2.$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E')\quad :\quad y'=2y+8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2\,;\,0)$? Si oui la préciser.

Bac S, Métropole et Réunion, septembre 2008

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=x^3+x^2+x-1$.
Établir que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0\leqslant \dfrac{x}{x^2+1}\leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-2n}\right)$.

c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Bac S, Polynésie, juin 2009