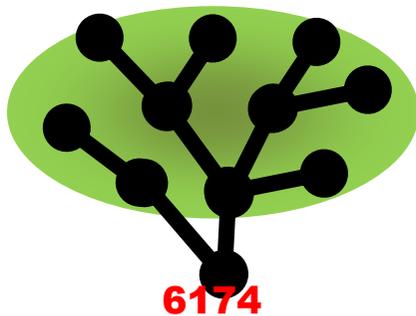


Compétences

- Associer à un problème une expression algébrique
- Mettre un problème en équation
- Réaliser un algorithme à l'aide d'un tableur ou d'un petit programme



Historique

Date	Classe	Type
------	--------	------

MIN - MAX ET KAPREKAR

On considère un nombre N comprenant au moins deux chiffres non tous égaux. En rangeant les chiffres qui constituent N dans l'ordre décroissant, on obtient un nombre P et en rangeant ces mêmes chiffres dans l'ordre croissant, on obtient un nombre G . Puis on calcule la différence $G - P$ cette procédure est nommée **Min-Max**.

L'algorithme de Kaprekar est la réitération de ce calcul.

1. Papier, crayon

- Appliquer la procédure Min-Max une dizaine de fois à partir de 34, 82, 17, et 3. Que remarquez-vous ? Continuer avec deux autres entiers de votre choix. Formuler une conjecture.
- Appliquer la procédure Min-Max une dizaine de fois à partir de 734, 882 et 107. Que remarquez-vous ? Continuer avec deux autres entiers de votre choix. Formuler une conjecture.
- Appliquer la procédure Min-Max une dizaine de fois à partir de 7 834, 9 882 et 3 141. Que remarquez-vous ? Continuer avec deux autres entiers de votre choix. Formuler une conjecture.

2. Écran, clavier et souris

L'objectif :

Comprendre un algorithme.

Écrire un algorithme permettant de calculer le Min-Max d'un entier donné, puis traduire cet algorithme pour qu'un logiciel de votre choix donne le Min-Max d'un entier.

2.1 A l'aide d'un tableur

- On veut créer une feuille de calcul permettant d'obtenir le Min-Max d'un entier à deux chiffres. Chacun des chiffres est entré dans une cellule différente (A6 et B6 pour l'exemple).

	A	B	C	D	E
1	Minmax pour $10 \leq N < 100$				
2	N'écrire que dans les cellules vertes				
3					
4					
5	nombre		Grand	Petit	différence
6	1	5	51	15	36

Comment obtenir l'entier Grand à partir des contenus des cellules A6 et B6 ?

Comment obtenir l'entier Petit à partir des contenus des cellules A6 et B6 ?

- Tester l'algorithme Min-Max à l'aide des résultats obtenus à la partie 1.
- On veut tester l'algorithme de Kaprekar, c'est-à-dire ici recommencer le calcul avec la valeur calculée en E6. Pour cela il faut que le logiciel mette le chiffre des dizaines de E6 en A7 et celui des unités de E6 en B7, puis compléter la feuille.

	A	B	C	D	E
1	Kaprekar pour $10 \leq N < 100$				
2	N'écrire que dans les cellules vertes				
3					
4					
5	nombre		Grand	Petit	différence
6	1	5	51	15	36
7	3	6	63	36	27
8	2	7	72	27	45
9	4	5	54	45	9
10	0	9	90	9	81
11	8	1	81	18	63

2.2 A l'aide d'un programme

Compléter la colonne de droite des tableaux.

<code>minmax(n) := {</code>	
<code> d := iquo(n, 10);</code>	
<code> u := irem(n, 10);</code>	
<code> g := 10 * max(d, u) + min(d, u);</code>	
<code> p := 10 * min(d, u) + max(d, u);</code>	
<code> return (g - p);</code>	
<code>};</code>	

<code>kaprekar(n, nb_etape) := {</code>	
---	--

<code>l := [n];</code>	
<code>pour j de 0 jusque nb_etape - 1 faire</code>	
<code>l := append(l, minmax(l[j]));</code>	
<code>fpour</code>	
<code>return (l);</code> <code>};;</code>	

3. Papier, crayon, neurones

1. Démontrer que P et G ont le même Min-Max.
2. Démontrer que le Min-Max d'un entier N compris entre 10 et 99 est un multiple de 9.
3. Soient N et N' deux entiers strictement inférieurs à 100. Démontrer que si leur différence est un multiple de 11, alors $\text{Min-Max}(N) = \text{Min-Max}(N')$.
4. Quel est le cycle final ? Démontrer le.

Pour aller plus loin...

- Dresser un graphe (une carte) des 90 entiers.
- Quelle est l'ensemble de nombre le plus éloigné du cycle (9 – 81 – 63 – 27 – 45) ?

4. Écran, clavier et souris (suite)

Adapter les feuilles de calcul (ou le programme) pour vérifier les résultats trouvés expérimentalement pour les entiers à 3 puis à 4 chiffres.

A savoir : les tableurs Excel (Microsoft) et Calc (Open Office) disposent de la fonction `petite.valeur(plage ; indice)` : le tableur trie en ordre croissant (au sens large) la plage de valeurs et renvoie la valeur placée à la position indice.

5. Papier, crayon, neurones (suite)

1. Démontrer que le Min-Max d'un entier N compris entre 100 et 999 est un multiple de 99.
2. Quel est le cycle final ? Démontrer le.

Pour aller plus loin...

- travailler sur les entiers à 4 chiffres...
- pour les entiers à trois chiffres écrire un programme donnant le nombre d'étapes pour arriver à 495. Donner la liste des entiers ayant la chaîne la plus longue.

1. Papier, crayon

1. 34 → 09 → 81 → 63 → 27 → 45 → 09 → ...
 82 → 54 → 09 ...
 17 → 54 → ...
 3 → 27 → ...

Conjectures possibles :

- le Min-Max est toujours un multiple de 9 ;
- l'algorithme de Kaprekar boucle sur le cycle (9 – 81 – 63 – 27 – 45)

2. 734 → 396 → 594 → 495 → 495 ...

882 → 594 → ...
 107 → 693 → 594 → ...

Conjectures possibles :

- le Min-Max est toujours un multiple de 9 (ou de 11 ou de 99) ;
- l'algorithme de Kaprekar termine avec 495.

3. 7 834 → 5 265 → 3 996 → 6 264 → 4 176 → 6 174 → 6 174 ...

9 882 → 6 993 → 6 264 → ...
 3 141 → 3 177 → 6 354 → 3 087 → 8 352 → 6 174 ...

Conjectures possibles :

- le Min-Max est toujours un multiple de 9 ;
- l'algorithme de Kaprekar termine su 6 174

2. Écran, souris

Entre nous

Décomposer un nombre en une liste de chiffres est compliqué : on se posera donc la question pédagogique : entre-t-on le nombre en tant que liste de chiffres ou en tant que réel (dans ce cas il faudra en extraire chaque chiffre...)

Pour le Min-Max, la version tableur de cet exercice propose d'entrer les nombres sous forme de liste de chiffres, la version XCas propose d'entrer un entier, puis d'en extraire chacun des chiffres qui le compose.

Suivant le niveau des élèves :

(1) faire traduire en français le programme XCas puis (2) laisser l'élève adapter le programme sous un tableur (outils qui lui est plus familier) et / ou sur sa calculatrice (si pas de salle informatique disponible).

OU

(1) faire écrire la feuille de tableur, puis (2) écrire le programme XCas avec eux.

Dans tous les cas il ne faut pas donner toute la feuille d'un coup

Pour aller plus loin

Pour des raisons de simplification, beaucoup de tests de saisie ne sont pas effectués : on pourrait les programmer ;

2.1 A l'aide d'un tableur

Min-Max

Grand =10*MAX(A6:B6)+MIN(A6:B6)
 Petit =10*MIN(A6:B6)+MAX(A6:B6)
 différence =C6-D6

Kaprekar

dizaines =ENT(E6/10)
 unités =MOD(E6;10)
 on recopie les lignes précédentes.

2.2 A l'aide d'un programme

minmax(n) := {	le nom de la fonction, entre parenthèse le nom de l'entier.
d := iquo(n, 10) ;	iquo donne le quotient entier (ici on obtient le chiffre des dizaines de n)
u := irem(n, 10) ;	irem donne le reste de la division euclidienne (ici on obtient le chiffre des unités de n)
g := 10*max(d,u)+min(d,u) ; p := 10*min(d,u)+max(d,u) ;	On calcule les nombres G et P.
return (g - p) ; }; ;	Le programme retourne la différence entre G et P.

Le programme Kaprekar applique nb_etape fois le programme minmax sur l'entier n.

kaprekar(n, nb_etape) := {	le nom de la fonction, entre parenthèse le nom de l'entier et le nombre d'application de la fonction minmax
l := [n] ;	la liste l ne contient que l'entier n.

pour j de 0 jusque nb_etape-1 faire	la boucle (attention dans XCas le premier élément d'une liste est indicé par 0)
l:=append(l,minmax(l[j]));	la liste l est complétée par le minmax de son dernier élément.
fpour	fin de la boucle
return (l); };;	on affiche la liste l obtenue.

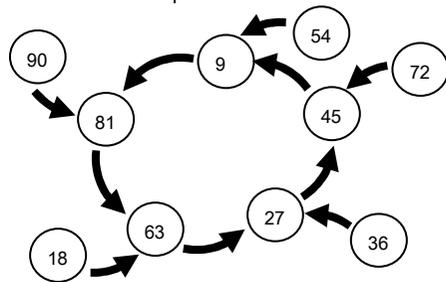
3. Papier, crayon, neurones

1. si $G = 10a + b$ alors $P = 10b + a$.
 $\text{Min-Max}(G) = 10a + b - (10b + a)$
 $\text{Min-Max}(P) = 10a + b - (10b + a)$

2. soit $a > b$;
 $\text{Min-Max}(N) = 10a + b - (10b + a)$
 $\text{Min-Max}(N) = 10(a - b) - (a - b)$
 $\text{Min-Max}(N) = 9(a - b)$

4. On sait que pour tout N ; $\text{Minmax}(N)$ est un multiple de 9, donc on a :

3. supposons $a > b$ et k entier compris entre 0 et 8
 $N' = N + 11k = N + 10k + k$
 $N' = 10a + b + 10k + k$
 $N' = 10(a + k) + (b + k)$
 comme $a > b$ on a $a + k > b + k$.
 $\text{Minmax}(N') = 9((a + k) - (b + k))$
 $\text{Minmax}(N') = 9(a - b)$
 $\text{Minmax}(N') = \text{Minmax}(N)^2$



Pour aller plus loin...

- Dresser un graphe (une carte) des 90 entiers.
- Quelle est l'ensemble de nombre le plus éloigné du cycle (9 - 81 - 63 - 27 - 45) ?

4. Écran et souris (suite)

Adapter les feuilles de calcul (ou le programme) pour vérifier les résultats trouvés expérimentalement pour les entiers à 3 puis à 4 chiffres.

A savoir : les tableurs Excel (Microsoft) et Calc (Open Office) disposent de la fonction `petite.valeur(plage ; indice)` : le tableur trie en ordre croissant (au sens large) la plage de valeurs et renvoie la valeur placée à la position indice.

5. Papier, crayon, neurones (suite)

1. Démontrer que le Min-Max d'un entier N compris entre 100 et 999 est un multiple de 99.
2. Quel est le cycle final ? Démontrer le.

Pour aller plus loin...

- travailler sur les entiers à 4 chiffres...
- pour les entiers à trois chiffres écrire un programme donnant le nombre d'étapes pour arriver à 495. Donner la liste des entiers ayant la chaîne la plus longue.