CALCUL FORMEL

1. Utilisation

- Simplifier le calcul algébrique
- Calculer avec les nombres complexes
- Résoudre des systèmes d'équations
- Développer – factoriser des expression
- Décomposer en produit des facteurs premier
- Calculer avec fractions...

2. Les logiciels

Deux logiciels de calculs formels, gratuits et téléchargeables.
Pour les deux, il existe des forums très réactifs sur lesquels on peut librement poser des questions, il existe également une documentation assez complète en français !

Maxima

le logiciel Maxima `http://maxima.sourceforge.net/`

et son interface graphique `http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page`

pour des fichiers d'aide `http://michel.gosse.free.fr/`

L'auteur était très réactif, mais les informations sur le site semblent dater...

XCas

le logiciel XCas : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html` (l'interface graphique est déroutante au début...)

XCas en ligne : `http://xcasenligne.fr/`

pour les fichiers d'aide : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`

L'auteur est très réactif !

J'ai une préférence pour Xcas... mais il peut être intéressant de jongler entre les deux : les algorithmes de calculs étant différents, certaines réponses seront plus faciles à obtenir avec l'un ou l'autre.

Remarques

- pour la multiplication, le symbole * ne peut pas être omis (sauf rares exceptions)
- sous Windows, les raccourcis clavier Ctrl-C, Ctrl-V permettent respectivement de copier et coller la sélection.

3. Quelques commandes

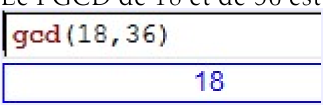
Répondre aux questions suivantes en utilisant les commandes du logiciel trouvées dans les menus *scolaire* ou dans le menu *aide* > *index*.
Les commandes existent en français et en anglais pour voir les synonymes : menu *Aide* > *index*

3.1 Quelques questions du DNB

Asie – 2013

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le PGCD de 18 et de 36 est 9



2. Le double de $\dfrac{9}{4}$ est égal à $\dfrac{9}{2}$.

```
2*9/4
```

$$\frac{9}{2}$$

3. Le carré de $3\sqrt{5}$ est égal à 15.

```
(3*sqrt(5))^2
```

$$(3*(\sqrt{5}))^2 \qquad \text{M}$$

```
normal((3*sqrt(5))^2)
```

$$45 \qquad \text{M}$$

Centres Étrangers – juin 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM)...

Les solutions de l'équation $(x+7)(2x-7) = 0$ sont

a) -7 et $3,5$ **b)** 7 et $-3,5$ **c)** -7 et 5

```
solve((x+7)*(2*x-7)=0,x)
```

$$\left[-7, \frac{7}{2}\right]$$

```
resoudre((x+7)*(2*x-7)=0,x)
```

$$\left[-7, \frac{7}{2}\right]$$

La (ou les) solution(s) de l'inéquation $-2(x+7) \leqslant -16$ est (sont)

a) tous les nombres inférieurs ou égaux à 1 **b)** tous les nombres supérieurs ou égaux à 1 **c)** 1

```
solve(-2*(x+7)<=-16,x)
```

$[x >= 1]$

La forme développée de $(7x-5)^2$ est

a) $49x^2-25$ **b)** $49x^2-70x+25$ **c)** $49x^2-70x-25$

```
expand((7*x-5)^2)
```

$49*x^2-70*x+25$

```
developper((7*x-5)^2)
```

$49*x^2-70*x+25$

Métropole - Antilles - Guyane - La Réunion – sept. 2013

Affirmation 1 : « La vitesse moyenne d'un coureur qui parcourt 18 km en une heure est strictement supérieure à celle d'une voiture télécommandée qui parcourt 5 m par seconde. »

```
convert(5_m*_s^(-1),_km*_h^(-1))
```

$18.0\_\frac{km}{h}$

```
convert(18_km/_h,_m/_s)
```

$5.0\_\frac{m}{s}$

```
convert(18_(km/h),_(m/s))
```

$5.0\_\frac{m}{s}$

```
convert(5_(m*s^-1),_(km*h^-1))
```

18.0_km*h^{-1}

CALCUL FORMEL

Métropole – juin 2012

On cherche à résoudre l'équation $(4x-3)^2-9=0$.

1. Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?

```
eq:=(4*x-3)^2-9=0
```

$((4*x-3)^2-9)=0$

```
subst(eq,x=3/4)
```

$(-9)=0$

```
subst(eq,x=0)
```

$0=0$

2. Prouvez que, pour tout nombre x, $(4x-3)^2-9=4x(4x-6)$

```
factor((4*x-3)^2-9)
```

$8*x*(-3+2*x)$

```
factoriser(4*x*(4*x-6))
```

$8*x*(-3+2*x)$

```
expand((4*x-3)^2-9)
```

$16*x^2-24*x$

```
developper(4*x*(4*x-6))
```

$16*x^2-24*x$

3. Déterminer les solutions de l'équation $(4x-3)^2 = 9$

```
solve((4x-3)^2-9=0x)
```

$$\left[0, \frac{3}{2}\right]$$

```
resoudre((4x-3)^2-9=0x)
```

$$\left[0, \frac{3}{2}\right]$$

Amérique du Nord – juin 2012

Affirmation 2 : 72 a exactement cinq diviseurs.

```
idivis(72)
```

$$[1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72]$$

3.2 Quelques questions du BAC

S – Polynésie – juin 2013

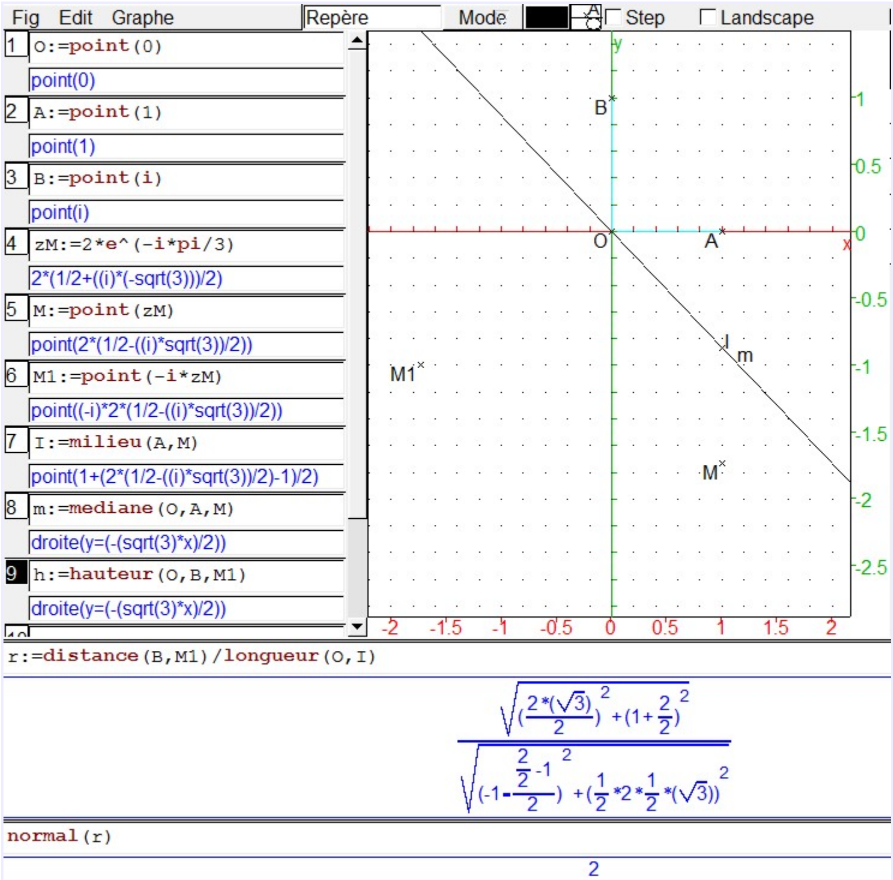
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).



1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

```
zM:=2*e^(-i*pi/3)
```

$$2*\left(\frac{1}{2}+\frac{i*(-(\sqrt{3}))}{2}\right)$$

```
normal(zM)
```

$$(-i)*(\sqrt{3})+1$$

```
re(zM)
```

$$\frac{2}{2}$$

```
im(zM)
```

$$-\frac{2*(\sqrt{3})}{2}$$

```
simplifier(-zM)
```

$$-1+i*(\sqrt{3})$$

```
abs(-zM)
```

$$2*\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}}\right)$$

```
normal(abs(-zM))
```

$$2$$

```
arg(-zM)
```

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{2*\pi}{2}$$

```
normal(arg(-zM))
```

$$\frac{2}{3}*\pi$$

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M′.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.

e) Montrer que BM′ = 2OI.

```
1  O:=point(0)
   point(0)
2  A:=point(1)
   point(1)
3  B:=point(i)
   point(i)
4  zM:=x+i*y
   x+(i)*y
5  M:=point(zM)
   point(x+(i)*y)
6  M1:=point(-i*zM)
   point((-i)*(x+(i)*y))
7  I:=milieu(A,M)
   point(1+(x+(i)*y-1)/2)
8  m:=mediane(O,A,M)
   droite(y=(y/(1+x)*x))
9  h:=hauteur(O,B,M1)
   droite(y=(y/(1+x)*x))
```

```
affixe(I)
```

$$1+\frac{x+i*y-1}{2}$$

```
coordonnees(I)
```

$$\left[1+\frac{x-1}{2},\ \frac{y}{2}\right]$$

```
est_perpendiculaire(droite(O,I),droite(B,M1))
```

$$1$$

```
r:=longueur(B,M1)/longueur(O,I)
```

$$\frac{\sqrt{(-y)^{2}+(1+x)^{2}}}{\sqrt{\left(-1-\frac{x-1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{y}{2}\right)^{2}}}$$

```
simplifier(r)
```

$$2$$

S – Nouvelle Calédonie – juin 2013

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

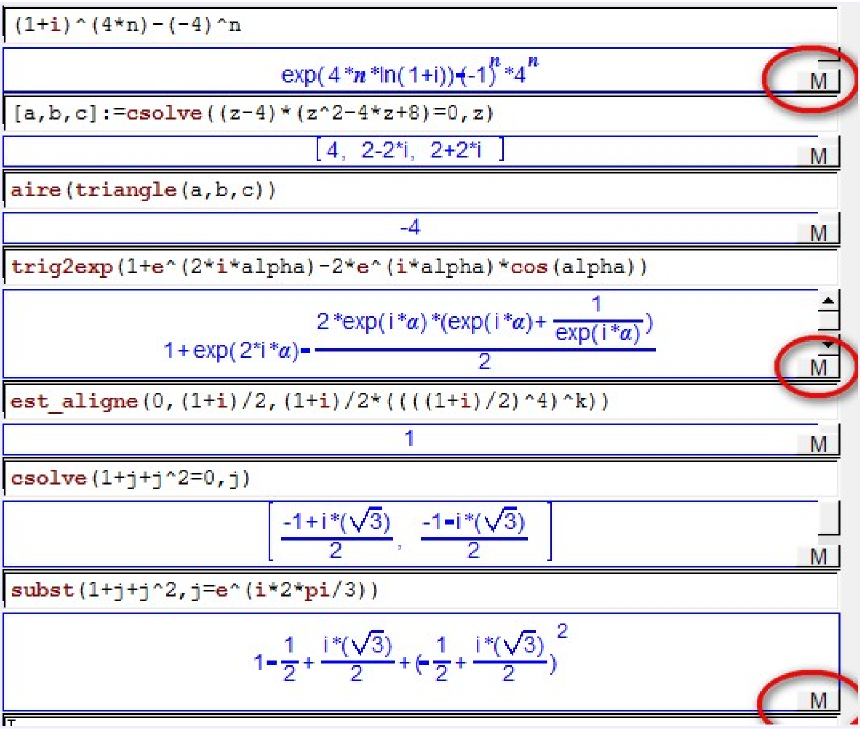
1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.

   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.



S – Nouvelle Calédonie – mars 2012

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=xe^x$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

Sur la courbe $\mathcal{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathcal{C}$. On a placé les points A′(a ; 0) et B′(1 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$.

```
int(x*e^x,x,0,1)
1
```

2. **a)** Donner l'aire du triangle OAA′ et montrer que l'aire du trapèze ABB′A′ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$.

b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$.

```
7  purge(a)
```
$$\frac{\pi}{4}$$

```
8  assume(a>=0 and a<=1)
```
a

```
9  A:=[a,f(a)]
```
[a, a*exp(a)]

```
0  B:=[1,f(1)]
```
[1, exp(1)]

```
1  A1:=[a,0]
```
[a, 0]

```
2  B1:=[1,0]
```
[1, 0]

```
3  aire(A,B,B1,A1)
```
$$\frac{-a^{2}*\exp(a)-a*\exp(1)+a*\exp(a)+\exp(1)}{2}$$

```
4  O:=[0,0];aire(O,A,A1)
```
$$\left([0,\ 0\ ],\ \frac{1}{2}*a^{2}*\exp(a)\ \right)$$

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x\left(e^{x} - e\right) + e - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$.

Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.

```
hach:=aire(O,A,A1)+aire(A,B,B1,A1)-int(f(x),x,0,1)
```

$$\frac{-a*\exp(1)+a*\exp(a)+\exp(1)-2}{2}$$

```
g:=unapply(numer(hach),a)
```

a -> a*exp(a)-a*exp(1)+exp(1)-2

```
g'(x)
```

exp(x)+x*exp(x)-exp(1)

```
g1:=diff(g)
```

a-> exp(a)+a*exp(a)-exp(1)

```
g2:=diff(diff(g))
```

a-> a*exp(a)+2*exp(a)

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

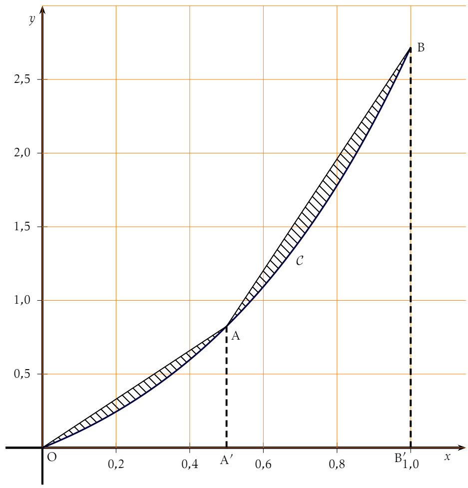
```
fMin(g(x),x=0..1)
```

Impossible d'isoler x in exp(x)*x+exp(x)-exp(1), changement pour des solutions approx.

0.557145598998

```
fsolve(g1(x)=0,x)
```

0.557145598998



S – Pondichéry – juin 2012

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

...

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\mathrm{I}(n)$

```
I(n):=integrer(e^(-n*x)/(1+x),x,0,1)
```

$$n \;\; \text{->} \; \mathrm{integrer}\left(\frac{\exp((-n)*x)}{1+x}, x, 0, 1\right)$$

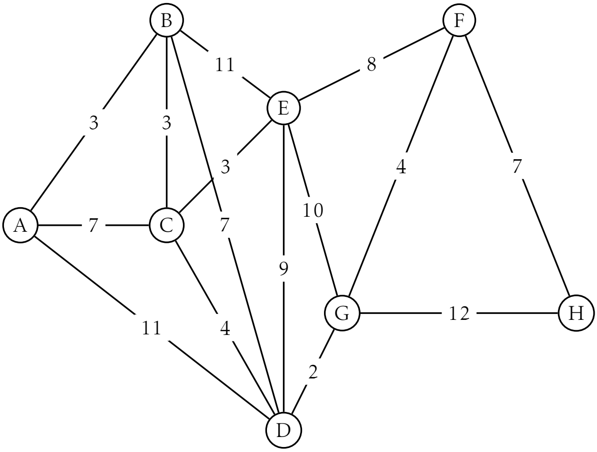
```
limite(I(n),n,+infinity)
```

0

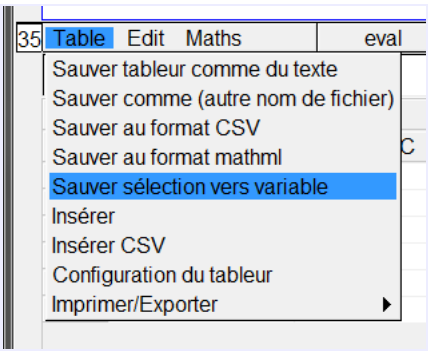
```
limite(n*I(n),n,+infinity)
```

1

ES – Pondichéry – avril 2012



On appelle M la matrice associée au graphe , M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique …
Calculer M^4, $M^{1}0$...



3.3 Quelques commandes Xcas

algèbre
  numer
analyse
  (prime) '
  fMin
  fsolve
  int
  integrer
  limite
  unapply
arithmétique
  gcd
  idivis
complexes
  abs
  affixe
  arg
  csolve
  im
  re
  trig2exp
constantes
  e
  i
  infinity
  π
conversion
  convert
développer
  developper
  expand
factoriser
  factor
  factoriser
fonctions
  sqrt
geometrie
  triangle
géométrie
  aire
  coordonnees
  distance
  equation
  est_aligne
  est_perpendiculaire
  hauteur
  longueur
  mediane
  milieu
  point
résoudre
  csolve
  resoudre
  solve
simplifier
  normal
  simplifier
variable
  assume
  purge
  subst