100 OUTILS
POUR LES MATHS

CALCUL FORMEL

1. Utilisation

- Simplifier le calcul algébrique
- Calculer avec les nombres complexes
- Résoudre des systèmes d'équations
- Développer – factoriser des expression
- Décomposer en produit des facteurs premier
- Calculer avec fractions...

2. Les logiciels

Deux logiciels de calculs formels, gratuits et téléchargeables.
Pour les deux, il existe des forums très réactifs sur lesquels on peut librement poser des questions, il existe également une documentation assez complète en français !

Maxima le logiciel Maxima *http://maxima.sourceforge.net/*
pour des fichiers d'aide *http://michel.gosse.free.fr/*
L'auteur était très réactif.
Il existe une version pour Androïd !

Xcas le logiciel Xcas : *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html*
(l'interface graphique est déroutante au début...)
Xcas en ligne : *http://xcasenligne.fr/*
pour les fichiers d'aide : *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html*
L'auteur est très réactif !
Il existe une version pour Androïd, mais pas dans GooglePlay...

GeoGebra Depuis la version 4, GeoGebra possède un module de calcul formel basé sur le noyau de Xcas.
Mais la syntaxe est différente et (de mon point de vue) les possibilités restent limitées. (attention : les commandes ne sont pas toujours les mêmes entre le module de géométrie et celui de calcul formel).
Pour les élèves, on garde un logiciel qu'ils connaissent.
On peut copier les formules en format LibreOffice !

J'ai une préférence pour Xcas... mais il peut être intéressant de jongler entre les trois : les algorithmes de calculs, les visuels... étant différents, certaines réponses seront plus faciles à obtenir avec l'un ou l'autre.

Remarques

- pour la multiplication, le symbole * ne peut pas être omis (sauf rares exceptions)
- les raccourcis clavier Ctrl-C, Ctrl-V permettent respectivement de copier et coller la sélection.

Pour la suite, nous allons travailler avec Xcas et/ou GeoGebra.

Pour Xcas, on peut découvrir des commandes à l'aide des menus *scolaire* ou dans le menu *aide* > *index*.
Les commandes existent en français et en anglais.

Exercices du DNB chercher les commandes à utiliser pour répondre aux questions ;

Exercices du BAC tester les commandes données en copies d'écran ;

Index à la fin de ce document, les commandes que j'ai utilisées (parmi de nombreuses autres disponibles !)

3. Quelques commandes

3.1 Exercices du DNB

Amérique du Nord – 2014

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des quatre questions, écrire sur votre copie le numéro de la question et la lettre A, B, ou C correspondant à la réponse choisie.

CALCUL FORMEL

	A	B	C
1. $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right) : \frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{17}{7}$
2. Le PGCD des nombres 84 et 133 est ...	1	7	3
3. Les solutions de l'inéquation $-3x+5 \geqslant 9$ sont les nombres x tels que ...	$x \leqslant -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$x \geqslant -\frac{4}{3}$
4. $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ est égal à ...	3	$3-\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$

Pondichéry – avril 2014

Exercice 2 (fin) Une expression factorisée de $(x-1)^2-16$ est...

$(x+3)(x-5)$ $\quad$ $(x-4)(x+4)$ $\quad$ $x^2-2x-15$

Exercice 3 « Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10. »
Est-ce vrai ? Justifier.

Nouvelle Calédonie – décembre 2014

Exercice 7 (fin) Donner, en justifiant, la solution de l'équation : $2x = -2x+8$.

Métropole - Antilles - Guyane - La Réunion – juin. 2014

Exerice 5, question 2 Une vitesse égale à $36\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ est égale à

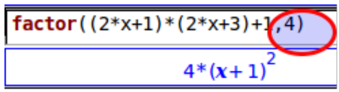
1. $10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ **2.** $60\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ **3.** $100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ **4.** $360\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Polynésie – juin 2014

Exercice 4 Deux affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.
Affirmation 1 : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
Affirmation 2 : $\sqrt{2}^{50}$ et $\sqrt{2}^{100}$ sont des nombres entiers.

Métropole - Antilles - Guyane – sept. 2014

Exercice 5 Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.
Dans Xcas, on peut préciser qu'on veut factoriser par 4.



3.2 Exercices du BAC

S – Pondichéry – avril 2014

Exercice 2 g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.
Proposition 2 Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

```
g(x):=2*x*ln(2*x+1)
// Interprète g
// Succès lors de la compilation g
x -> 2*x*ln(2*x+1)
assume(x>-1/2);solve(g(x)=2*x,x)
(x, [0, (exp(1)-1)/2] )
solve(x+3=0,x)
[]
purge(x)
[[], [-1/2, +∞], [-1/2]]
solve(x+3=0,x)
[-3]
```

Proposition 3 Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

```
g'(1/2)
2*ln(2)+1
(2*ln(2)+1)==(1+ln(4))
faux ?!?
```

```
g'(1/2)
→ 2 ln(2)+1
2*ln(2)+1==1+ln(4)
→ true
```

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

Proposition 4 Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ se coupent perpendiculairement.

GeoGebra permet de construire la figure, idées :

- plans sont définis par leur équation
- point dans un plan
- perpendiculaire à un plan passant par un point donné
- mesure d'un angle

MAIS on ne démontre rien...

Xcas va effectuer les calculs en valeurs exactes : il démontre !

Exercice 3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. ...

4. a) Démontrer que le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c) ...

```
z:=3/4+sqrt(3)/4*i
```

$$(\sqrt{3})*\frac{1}{4}*i+\frac{3}{4}$$

```
normal(abs(z)); arg(z)
```

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{6}\right)$$

```
resoudre_recurrence(z(n+1)=(3/4+sqrt(3)/4*i)*z(n),z(n),z(0)=1)
```

$$\left(-\frac{(\sqrt{3})*(-i)-3}{4}\right)^{n}$$

```
normal(abs((-(sqrt(3)*(-i)-3)/4)^n))
```

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
r(n):=((sqrt(3))/2)^n
// Interprète r
// Succès lors de la compilation r
```

$$n \;\to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
limite(r(n),n,+infinity)
```

$$0$$

```
z(n):=(-(sqrt(3)*(-i)-3)/4)^n
// Interprète z
// Succès lors de la compilation z
```

$$n \;\to \left(-\frac{((\sqrt{3})*(-i)-3)}{4}\right)^{n}$$

```
est_rectangle(0,z(n),z(n+1))
```

$$3$$

```
Z:=(sqrt(3)/2)^n*e(i*pi/6*n)
```

$$\exp(1)*\exp\left(\frac{i*n*\pi}{6}\right)*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
im(Z)
```

$$\exp(1)*\sin\left(\frac{n*\pi}{6}\right)*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
solve(im(Z)=0,n)
```

$$[0,\ 6]$$

```
solve(re(Z)=0,n)
```

$$[-3,\ 3]$$

```
a:=3/4+sqrt(3)/4*ί
```

$$\to \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\,\iota+3\right)$$

Alt-i pour le i complexe

```
abs(a)
```

$$\to \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

```
arg(a)
```

$$\to \frac{1}{6}\pi$$

```
Limite[(sqrt(3)/2)^n, +inf]
```

$$\to 0$$

```
Z:=(sqrt(3)/2)^n* e^( ί* π /6*n)
```

$$\to e^{\frac{\iota}{6} n \pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{n}$$

Alt-p pour pi
Alt-e pour exp

```
Im(Z)
```

$$\to \sin\left(\frac{1}{6}n\,\pi\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{n}$$

```
Résoudre[Im(Z)=0, n]
```

$$\to \{n = 6\,k_1\}$$

```
Résoudre[Re(Z)=0, n]
```

$$\to \{n = 6\,k_2 + 3\}$$

Exercice 4

Partie A f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;\,2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. ...
2. ...
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a) Déterminer la valeur de b... (On trouve rapidement $b = 1$)
   b) Prouver que $a = 2$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour le plaisir de travailler avec des fonctions a deux variables...

`f(a,x):=e^(-x)+a*x+1`	f(a,x):= e ^(-x)+a*x+1

// Interprète f
// Succès lors de la compilation f
$(a, x) \mapsto \exp(-x)+a*x+1$
	$\to$ $f(a, x) := e^{-x} + a\,x + 1$

`f1:=unapply(diff(f(a,x),x),[a,x])`	f_1(a,x):=Dérivée[f, x]
$(a, x) \mapsto -\exp(-x)+a$	$\to$ $f_1(a, x) := -e^{-x} + a$
`solve(f1(a,0)=1,a)`	Résoudre[f_1(a, 0) = 1,a]
[2]	$\to$ $\{a = 2\}$
`solve(f1(2,x)>=0,x)`	Résoudre[f_1(2,x)>=0,x]
$[x>=(-\ln(2))]$	$\to$ $\{x \geq -\ln(2)\}$
`limite(f(2,x),x,+infinity)`	Limite[f(2, x), x,+inf]
$+\infty$	$\to$ ∞

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b) ...

CALCUL FORMEL

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

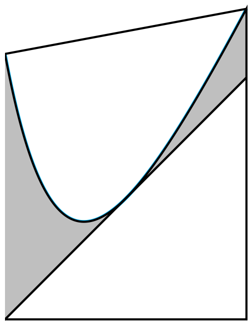


figure 2

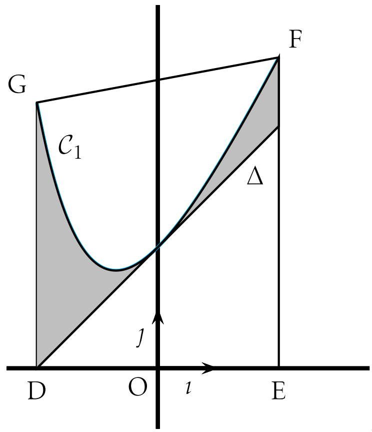


figure 3

Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$
- E est le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

```
g:=unapply(normal(f(2,x)-(x+2)),x)
```

$x \to x+\exp(-x)-1$

```
fMin(g(x),x)
```

0

```
Logo:=aire(g(x),x=-2..2)
```

$-\frac{1}{\exp(2)}+\exp(2)-4$

```
normal(Logo); evalf(Logo)
```

$\left(\frac{\exp(2)^2-4*\exp(2)-1}{\exp(2)},\ 3.25372081569\right)$

```
g(x):=f(2,x)-(x+2)
```

$\to\ g(x) := e^{-x}+x-1$

```
{Extremum[g(x),-100,100]}
```

$\to\ \{(0,0)\}$

les accolades pour obtenir la LISTE de TOUS les extrema

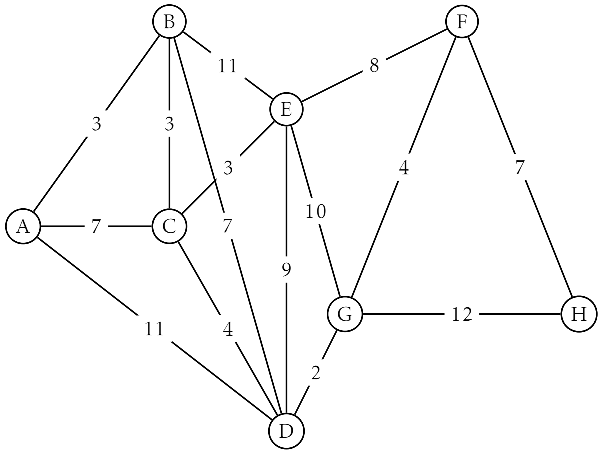
```
Logo:=Intégrale[g(x), x, -2, 2]
```

$\to\ \frac{(e^2)^2-4\,e^2-1}{e^2}$

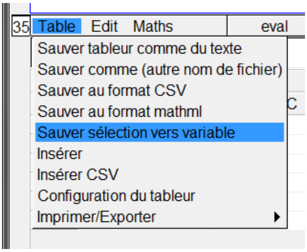
```
Numérique[#27]
```

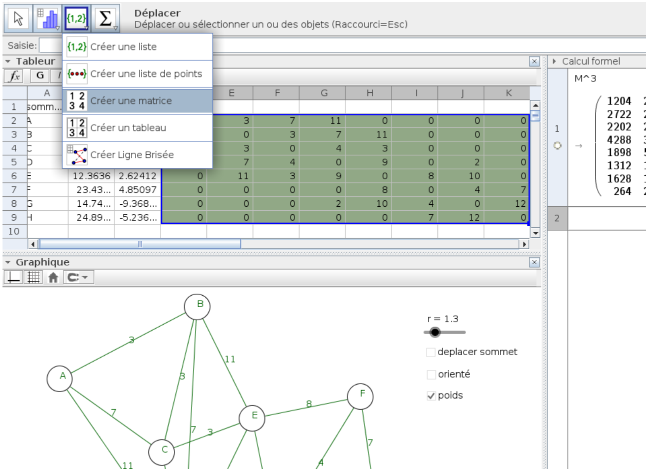
#27 pour utiliser le résultat de la ligne n° 27

ES – Pondichéry – avril 2012



On appelle M la matrice associée au graphe, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique . . .
Calculer M^4, M^{10}...





pour trouver la matrice associée à un graphe :

- un utilitaire de l'IREM de la Réunion : *http://irem.univ-reunion.fr/IMG/html/graphes_css.html*
- pour manipuler des graphes : le logiciel Grin. Je ne le trouve plus sur le net, je l'ai copié ici : *http://frederic.leon77.free.fr* rubrique logiciels.
- pour obtenir le code LaTeX de la matrice associée à un graphe et avec mise en forme de ce dernier : le logiciel Geophar (dans *Outils* > *options* > *modules*) *http://sourceforge.net/projects/geophar/*
- pour dessiner un graphe à partir de la matrice des poids des arêtes : une feuille GeoGebra à améliorer *http://frederic.leon77.free.fr* rubrique logiciels.
- pour avoir une image d'une formule LaTeX en différents formats : *http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php*
  ou copier la formule dans une zone de texte GeoGebra et exporter l'image.
  ou utiliser la commande *importer LaTeX depuis le presse-papier* de l'extension Cmath *http://cdeval.free.fr/*.

Commandes Xcas

algèbre
- égalité ==

algèbre
- développer (expand)
- evalf
- factoriser (factor)
- normal
- résoudre (solve)
- simplifier

analyse
- aire
- fMin
- limite

arithmétique
- gcd
- idivis

complexes
- abs
- arg
- im, re

constante
- +infinity
- e
- i
- π

conversion
- convert

fonction
- dérivée : opérateur ’
- dérivée : diff
- limite
- sqrt : racine carrée
- sqrt : racine carréé
- unapply

géométrie
- est_rectangle
- est_perpendiculaire (2D ou 3D)
- plan

suites
- resoudre_recurrence (rsolve)

variable
- affectation :=
- purge
- supposons (assume)
- type

Commandes GeoGebra

algèbre
  égalité ==
algèbre
  Développer
  Factoriser
  Numérique
  Résoudre
  Simplifier
analyse
  Extremum
  Intégrale
  Limite
arithmétique
  ListeDiviseurs
  PGCD
complexes
  abs
  arg
  Im, Re
constante
  +inf
  e (taper Alt-e)
  i (taper Alt-i)
  π (taper Alt-p)
fonction
  dérivée : opérateur ’
  Dérivée
  Limite
  sqrt : racine carrée