Livre 1^{ere} ES

■ *Calcul numérique :*

Comme il se doit, le calcul numérique est utilisé dans tous les chapitres.
L'outil préconisé est — au minimum — la calculatrice scientifique avec mémoires mais les utilisateurs d'ordinateurs de poche (ou calculatrice scientifiques programmables) ou même de véritables ordinateurs (programmables en langage évolué : BASIC, LSE, FORTRAN, ...) n'ont pas été oubliés.
La transcription des algorithmes de calcul est faite au moyen d'organigrammes; méthode qui a l'avantage — mais aussi l'inconvénient — de n'être pas adaptée à un instrument particulier (marque et type de la calculatrice).
Par exemple, vous remarquerez que sur certains types de calculatrices ceux-ci peuvent être simplifiés par l'utilisation du registre de calcul (et d'affichage) à la place d'une mémoire.
De plus, l'usage des organigrammes est maintenant quasiment universelle et donc cet ouvrage prépare l'élève à un mode d'expression courant aussi bien à l'université que dans la vie professionnelle.

2

Compléments

APPROCHES

A8 Soit u_n la somme de rang n de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$. Constatez que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est entièrement définie par les formules :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Calculez u_1, u_3, u_{10}, u_{100} et $u_{1\,000}$ si votre moyen de calcul vous le permet. Évaluez l'erreur de calcul commise par votre calculatrice dans chacun de ces calculs.

A9 Soit v_n la somme de rang n de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$. Constatez que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est entièrement définie par les formules :

$$v_1 = -1 \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Calculez v_1, v_3, v_{10}, v_{100} et $v_{1\,000}$ si votre moyen de calcul vous le permet. Évaluez l'erreur de calcul commise par votre calculatrice dans chacun de ces calculs.

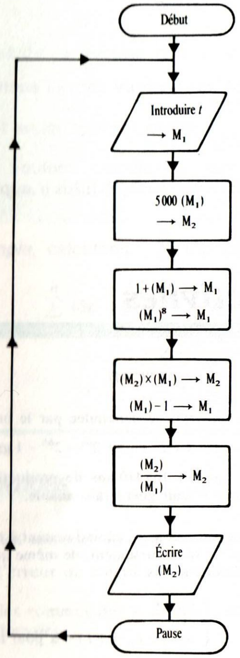
A10 Soit u_n la somme de rang n de la suite $(n)_{n \geqslant 0}$.
En écrivant : $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$ et : $u_n = n + (n-1) + \ldots + 1$, calculez $2u_n$ et déduisez-en u_n en fonction de n.

A11 Le contexte est celui de l'activité **A10**. En sommant les égalités :

$$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 \quad \text{pour} \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

calculez u_n en fonction de n.

ieurs valeurs de t est plus rapide avec une
ce programmable. L'organigramme de la
lécrit l'algorithme de calcul :



ontient successivement : t, $t+1$, $(t+1)^8$,
1 et M_2 : $50\,000t$, $50\,000t(t+1)^8$,
$(t+1)^8$
$+1)^8-1$.
ableau (fig. 3) de résultats :

t	0,045	0,048	0,049	0,048 5	0,048 2	0,048 1
$f(t)$	7 580	7 674	7 705	7 689	7 680	7 677

us sommes approchés progressivement de la
577.)
= 4,81 % à 10^{-2} près. Nous remarquons que
taux proportionnel qui a été appliqué :
,8125.
annuel réel de l'emprunt est de 20,67 %.

A_8 Pour calculer u_{100} et $u_{1\,000}$, il faut disposer d'une calculatrice *programmable*. *L'organigramme du calcul de u_n* est (fig. 4) :

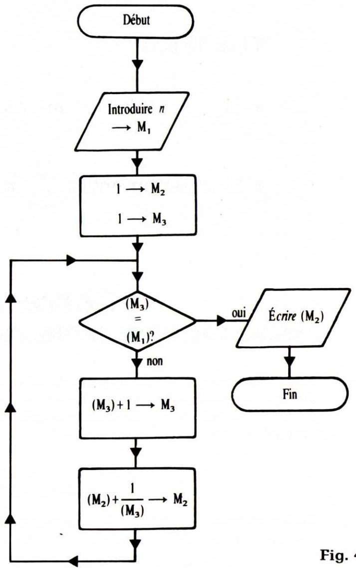
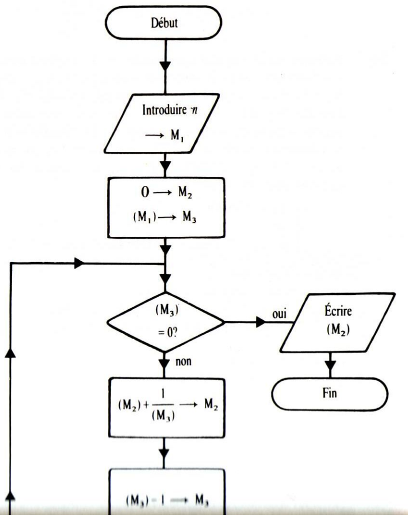


Fig. 4.



Où la mémoire M_1 contient n, M_2 la somme de rang p et M_3, p pour les valeurs successives de $p = 1, 2, \ldots, n$.

Le calcul de $\frac{1}{p}$ se fait avec une prévision de $0,5 \times 10^{-8}$ (cas d'une calculatrice à 8 chiffres) donc l'erreur sur u_{100} est $0,5 \times 10^{-6}$, sur $u_{1\,000}$ $0,5 \times 10^{-5}$. Remarquons que, du fait de la virgule flottante, le calcul est plus précis en le faisant dans l'autre sens comme l'indique l'organigramme de la figure 5.

Le tableau de la figure 6 donne les résultats à 10^{-2} près :

n	1	3	10	100	1 000
u_n	1	1,83	2,93	5,19	7,49

Fig. 6.

A_9 Pour calculer v_{100} et $v_{1\,000}$, il faut disposer d'une calculatrice programmable. L'algorithme du calcul est plus délicat que celui de l'activité A_8 à cause du terme : $(-1)^n$. Le plus simple est de le calculer par récurrence car les formules :

$$\begin{cases} w_1 = -1 \\ \text{et} \\ w_{n+1} = -w_n \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

définissent la suite $((-1)^n)_{n \geq 1} = (w_n)_{n \geq 1}$.
Nous garderons les résultats de ce calcul dans la mémoire M_4 ce qui modifie légèrement l'organigramme de l'activité A_8 (fig. 7) :

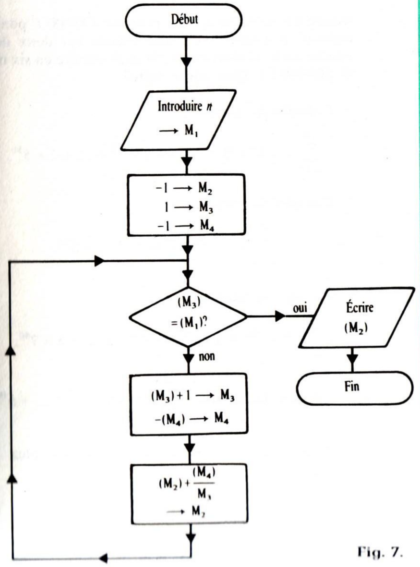


Fig. 7.

Le tableau de la figure 8 donne les résu[ltats à] 10^{-2} près :

n	1	3	10	100	1 000
v_n	-1	$-0,83$	$-0,65$	$-0,69$	$-0,69$

A_{10}

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ u_n &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2u_n &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \end{aligned}$$

donc : $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

A_{11} $\sum_{p=0}^{n} (p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} p^2 + 2 \sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} 1.$

Et : $\sum_{p=0}^{n} (p+1)^2 = \sum_{p=1}^{n+1} p^2$

car ces deux sommes sont : $1^2 + 2^2 + \ldots + ($ dans les deux écrtures, p n'a pas le même se[ns,] cela n'a pas d'importance car c'est une [variable] muette.

Donc : $\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \sum_{p=0}^{n} p^2 + 2 \sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} 1$

D'où : $\sum_{p=0}^{n} p = \frac{1}{2}\left[\sum_{p=1}^{n+1} p^2 - \sum_{p=0}^{n} p^2 - \sum_{p=0}^{n} 1\right]$
$= \frac{1}{2}[(n+1)^2 - (n+1)]$
$= \frac{n(n+1)}{2}.$

A_{12} L'organigramme du calcul est (fig. 9) :