Pythagore, l'homme qui voyait des nombres partout.

Les irrationnels

Le théorème du Perroquet, Denis Guedj (Ed. Point, p. 131)

[...] Comme pour Thalès, on ne dispose d'aucune œuvre écrite de Pythagore, pas plus qu'on ne connaît les dates exactes de sa naissance et de sa mort. On sait seulement qu'il a vécu au V$^{\text{ieme}}$ siècle avant notre ère, qu'il est né dans l'île de Samos, au milieu de la mer Égée et qu'il est mort à Crotone dans l'extrême sud de l'Italie.

Pythagore avait dix-huit ans lorsqu'il participa aux Jeux Olympiques. Il remporta toutes les compétitions de pugilat. Après sa victoire, il décida de voyager. En Ionie toute proche, il passa quelques années auprès de Thalès et d'Animaxandre, son élève. Puis, en Syrie, il séjourna auprès des Sages phéniciens qui l'initièrent au mystère de Byblos. Puis au mont Carmel, dans le Liban d'aujourd'hui. De là il s'embarqua pour l'Égypte, y resta vingt années. Dans les temples des rives du Nil, il eut tout le loisirs d'acquérir le savoir des prêtres égyptiens.

Et voilà que les Perses envahirent le pays, et voilà qu'il se retrouve prisonnier et qu'on l'emmène à Babylone. Il n'y perd pas son temps. Durant les douze années passées dans la capitale mésopotamienne, il acquiert l'immense savoir des scribes et celui des mages babyloniens, et, pleins d'usages et de raison il retourna vers Samos qu'il avait quittée quarante ans plus tôt. Mais à Samos régnait Polycrate, le tyran, et Pythagore haïssait les tyrans. Alors il reparti [...] Pythagore alla se fixer dans la cité [...] de Crotone. Où il fonda son « École ».

De Pythagore, qui fut élève de Thalès pendant quelques années, jusqu'à Achytas de Tarente, lui même fidèle ami de Platon, l'école Pythagoricienne dura près de 150 années et compta 218 Pythagoriciens. [...] Tous ne furent pas mathématiciens.

[...] Hippase fut l'un des premiers pythagoriciens ; il était chef des *acousmaticiens*, les candidats à l'initiation, tandis que Pythagore dirigeait les *mathématiciens*, les initiés.

De l'impuissance à l'assurance

Le théorème du Perroquet, Denis Guedj (Ed. Point, p. 162)

Nous sommes au V$^{\text{ieme}}$ siècle avant notre ère, quelque part en Grande Grèce, probablement sur les rivages d'Italie du sud, près de Crotone. Drame en trois actes.[...]

Premier acte. Tout est nombre.

Quels étaient-ils les nombres chargés de dire le monde et l'harmonie, ces nombres chargés de dire le cosmos ? Les nombres entiers. Et les fractions, aussi, qui ne sont que des rapports d'entiers. Les positifs uniquement. Pour la bonne raison qu'il n'y avait pas de nombres négatifs dans les civilisations de l'Antiquité.

[...L]es Grecs ont utilisé les rapports de deux entiers quelconques. [...] La fonction principale de ces nombres, nommées plus tard rationnels, était d'exprimer numériquement les grandeurs géométriques, c'est à dire de les mesurer. [...]

Deuxième acte. L'arrivée de la diagonale du carré de côté 1.

[...] Sur une feuille de papier, M. Ruche dessina un carré et l'une de ses diagonales. [...] Il annonça :

Côté et diagonale, les deux segments remarquables d'un carré !
Quel rapport y a-t-il entre eux ? Prenons le carré le plus simple, celui de côté 1. Quelle est la longueur de la diagonale ? Coupons le en deux, on obtient deux triangles isocèles égaux. L'hypoténuse commune des triangles est la diagonale du carré.

Qu'affirme le théorème de Pythagore ? [...]
Carré de la diagonale = $1^2 + 1^2 = 2$.

Voilà l'information capitale : la longueur de la diagonale est un nombre dont le carré est 2 ! [...]

Quel est ce nombre ? C'est peu dire que les Grecs le cherchèrent. Aucun nombre ne convenait ! Aucun entier, aucune fraction ! La question surgit alors : ce nombre existe-t-il ? Et s'il n'existe pas, comment s'en assurer ? Pour s'assurer qu'une chose existe, il suffit de l'exhiber. Mais quand elle n'existe pas, hein ? Difficile d'exhiber la non-existence ! Alors ? La seule façon d'affirmer qu'une chose n'existe pas, c'est de prouver qu'elle NE PEUT PAS EXISTER. […]

C'est ce qu'on fait les Pythagoriciens. Ils ont démontré qu'un nombre rationnel dont le carré est 2 ne peut pas exister. Si un nombre représente le côté d'un carré, aucun nombre ne pourra représenter sa diagonale. La diagonale et le côté sont INCOMMENSURABLES ![…]

Regardez la figure. VOIT-ON que la diagonale et le côté sont incommensurables ? Non ! On ne décèle aucun indice qui nous mette la puce à l'oreille. Rien de cette impossibilité ne transpire. L'incommensurabilité n'est pas visible ! La figure est muette, seul le travail de la pensée peut la révéler.

Troisième acte. Comment réagit la société grecque à ces révélations ?

[…] Le lien capital entre nombres et grandeurs, qui établit la cohérence de l'univers des pythagoriciens, fut brutalement rompu. Et il le fut au cœur même d'une des figures phare du monde antique : le carré. Comble, le coup avait été porté par l'application de deux des plus célèbres créations des pythagoriciens, le théorème de Pythagore lui-même […] et la séparation des entiers en pairs et impairs. […]

Voilà le scandale logique qu'Hippase de Métaponte a divulgué à l'extérieur du cercle des Pythagoriciens. Pour l'avoir fait, il a péri dans un naufrage.

Chercher une fraction proche de $\sqrt{2}$

Présentation de l'algorithme de recherche par dichotomie.

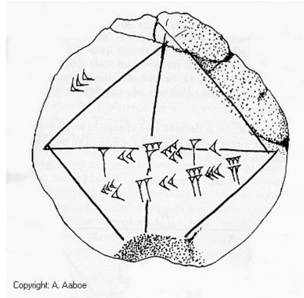
Expérimentation « à la main »pour trouver des fractions proches de $\sqrt{2}$.

Écriture en langage naturel l'algorithme :

- se poser la question : que veut-on obtenir comme résultat ? (une fraction, deux fractions, un décimal…)
- Implémenter dans un logiciel de calcul formel (par exemple Xcas) et l'améliorer pour obtenir ou bien la (les) fraction(s) à la n-ième étape ou bien la fraction proche à 10^{-n} de $\sqrt{2}$ (n entier choisi par l'utilisateur).

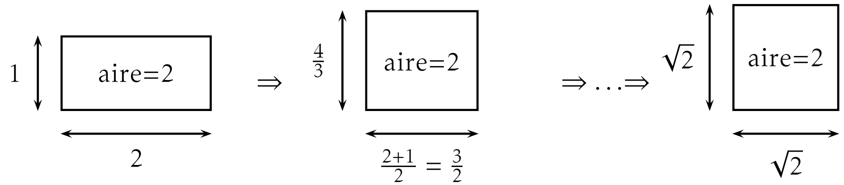
YBC 7289 et La méthode de Héron

http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/algebre/tablette-ybc-7289#



On part d'un rectangle de côtés 1 et 2 et d'aire 2.

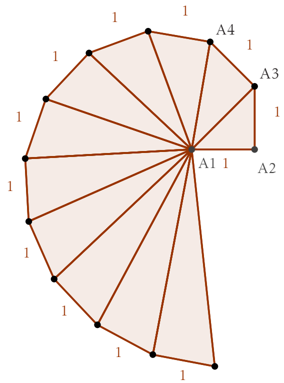
On construit les rectangles suivants, qui ont tous la même aire, de façon à obtenir au final un carré.



1. Calculer les côtés des 2 rectangles suivants.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer les côtés du rectangle à l'étape ($n+1$) à partir de celles du rectangle de l'étape n et qui s'arrête lorsque la différence entre les deux côtés du rectangle est inférieure à une précision donnée.
3. Continuer les calculs à l'aide d'un logiciel

Spirale rectangle

Écrire un algorithme permettant de construire le triangle rectangle $n+1$ à partir du triangle rectangle n de la spirale ci-contre construite à partir du segment [A1A2]. (Les nombres ne sont pas en indice… c'est voulu.)



Sous GeoGebra il existe les outils :
Translation / VecteurUnitaireOrtohogonal / Segment.

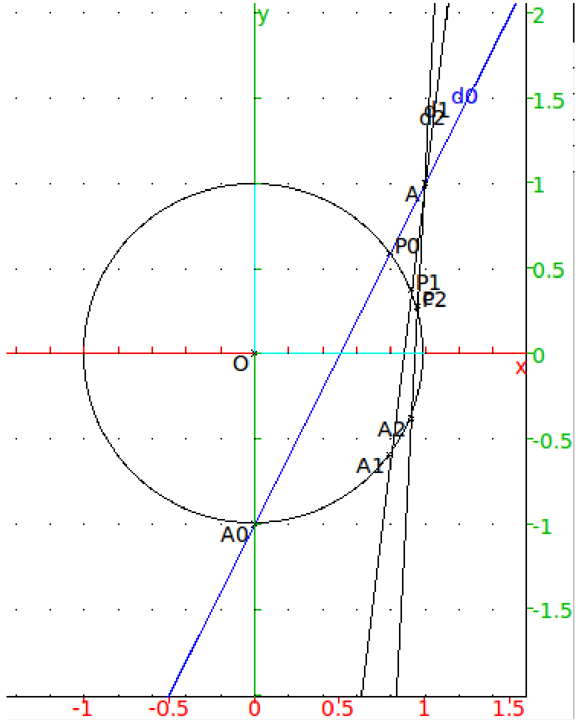
Un peu de géométrie

idée : Le livre des nombres (p 127) , John Conway – Richard Guy, Eyrolles

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, on définit le cercle c de centre O et de rayon 1, les points A et A0 de coordonnées respectives $(1;1)$ et $(0;-1)$.
(Le fait que les nombres ne soient pas écris en indice est voulu.)

On construit ensuite les points Pi de la façon suivante :

- P0 est l'intersection de (AA0) et c ;
- A1 est le symétrique de P0 par rapport à l'axe des abscisses ;
- P1 est l'intersection de (AA1) et c ;
- A2 est le symétrique de P1 par rapport à l'axe des abscisses ;
- P2 est l'intersection de (AA2) et c ;
- etc



Calculer les valeurs exactes des coordonnées des points P0, P1 et P2.

On pourra utiliser le module de géométrie de Xcas, en tapant chaque instruction dans une ligne de commande.

```
O:=point(0,0);
A:=point(1,1);
c:=cercle(O,1);
A0:=point(0,-1);
d0:=droite(A0,A);
P0:=inter(c,d0,point(1,0));
A1:=point(abscisse(P0),-ordonnee(P0));
d1:=droite(A1,A);
P1:=inter(c,d1,point(1,0));
A2:=point(abscisse(P1),-ordonnee(P1));
d2:=droite(A2,A);
P2:=inter(c,d2,point(1,0));
```

Le côté répétitif donnera envie d'utiliser le module *programme* ou le module *tableur* pour obtenir rapidement les coordonnées des points…