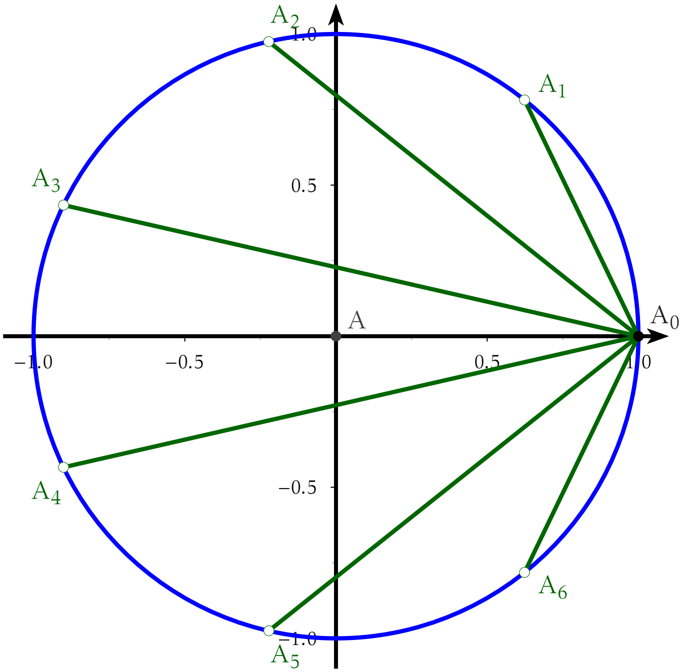
# CORDES




Le cercle unité est partagé en $n$ points qui le partage en $n$ arcs de même longueur et qui permettent de créer $(n-1)$ cordes.

## à faire

- Créer une figure dynamique permettant d'obtenir autant de cordes que voulu et calculer le produit des longueurs des cordes.
- Émettre une conjecture, puis la démontrer

# CORDES

On cherche à calculer $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}}|$

Xcas ne nous aide pas beaucoup…

Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - 1$ qui a pour racines $\mathrm{X}_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1\,;n]\!]$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k$
Pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$
donc $\mathrm{X}_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les racines de $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k$
d'où $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$
donc $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$
pour $\mathrm{X} = 1$ on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$
$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$
or $\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}}| = |\prod_{k=1}^{n-1} 1 - \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}}|$
d'où $\mathrm{P} = n$

## pour continuer

Comme tout triangle $\mathrm{AA}_0\mathrm{A}_k$ est isocèle en A,
on a : $\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}{2}$ (rappel : le rayon vaut 1)

donc $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{n-1} \dfrac{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}{2} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}{\prod_{k=1}^{n-1} 2}$

$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

## Commande

Ici seul le tableur de Xcas permet de consolider la conjecture car il travaille en valeurs exactes…