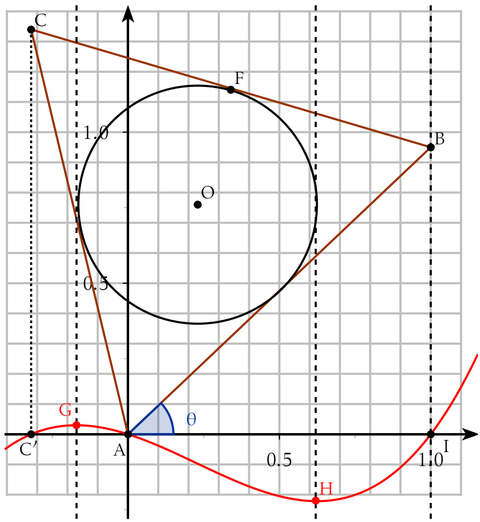
Croustillant
sur lit de calcul formel

UNE VERSION ÉLÈVE

Ce document a été écrit avec Daniel DRAY, il a donné cette version du problème en DM à ses élèves de $1^{ère}$S.



Dans un repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère un triangle équilatéral ABC tel que l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}\right) = \theta$ et tel que l'abscisse de B est 1.

On note C′ le projeté orthogonal de C sur l'axe $(A, \vec{\imath})$, F le milieu de [BC], Γ le cercle inscrit dans le triangle ABC de centre O.

On note f le polynôme de degré 3 tel que le coefficient de x^3 est 1 et qui s'annule pour les abscisses des points A, B, C. Enfin on appelle G et H les points d'ordonnées les extremums locaux de f comme sur la figure ci-contre.

On veut démontrer que les droites perpendiculaires à l'axe $(A, \vec{\imath})$ passant par G et H sont tangentes au cercle Γ.

Dans la suite on note a l'abscisse du point C et on admet que la fonction f est unique.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = x(x-a)(x-1)$.

2. On note x_G et x_H les abscisses des points G et H. Vérifier que $\dfrac{x_G + x_H}{2} = \dfrac{a+1}{3}$

et que $x_H - x_G = \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 - a + 1}$.

3. Vérifier que les coordonnées du point C sont $\left(\dfrac{1}{2}\left(1 - \tan(\theta)\sqrt{3}\right)\,;\dfrac{1}{2}\left(\tan(\theta) + \sqrt{3}\right)\right)$.
   Déterminer les coordonnées B ,F et O en fonction de $\tan(\theta)$.
4. Vérifier que le diamètre du cercle Γ a pour valeur $\dfrac{1}{\cos(\theta)\sqrt{3}}$.
5. Conclure.