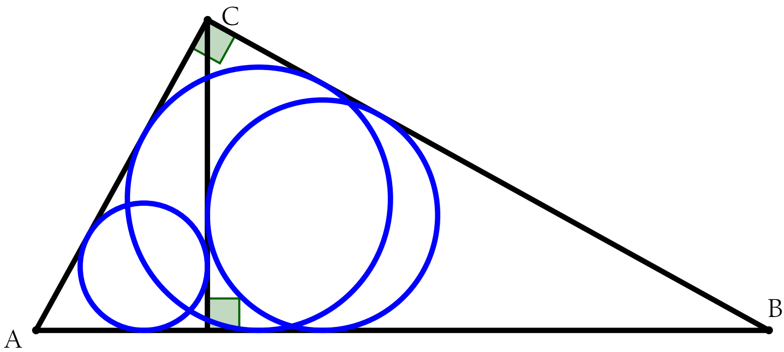
Croustillants géométriques
sur lit de calcul formel

SANGAKU



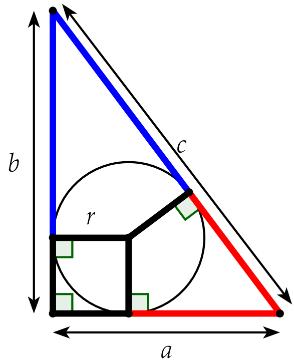
- Quelle relation lie les rayons des cercles inscrits ?
- Quelle relation lie les aires des cercles inscrits ?

à faire

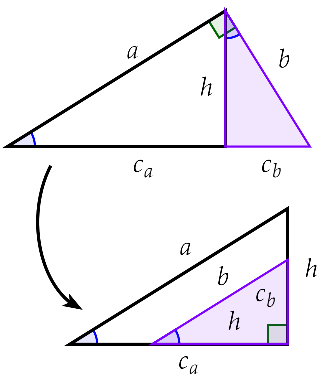
- Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Émettre une conjecture, puis la démontrer.

SANGAKU

Pistes de reflexions



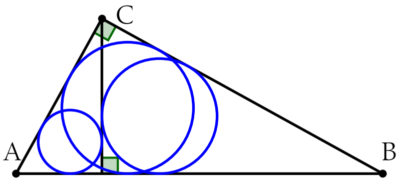
donc $c = (b-r)+(a-r)$ d'où $r = \dfrac{a+b-c}{2}$



$$\frac{c_a}{h} = \frac{h}{c_b} = \frac{b}{a}$$

SANGAKU

Somme des rayons



$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{AHC}} &= \frac{c_a + h - b}{2}\\
r_{\mathrm{BHC}} &= \frac{c_b + h - a}{2}\\
r_{\mathrm{ACB}} &= \frac{a + b - c}{2}\\
\hline
r_{\mathrm{AHC}} + r_{\mathrm{BHC}} + r_{\mathrm{ACB}} &= \frac{2h}{2} = h
\end{aligned}
$$

remarque (merci à Cédric Coste) : $\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} = ch = ab$, donc $h = \dfrac{ab}{c}$

d'où $r_{\mathrm{AHC}} + r_{\mathrm{BHC}} + r_{\mathrm{ACB}} = \dfrac{ab}{c}$.
la somme des rayons en fonction des longueurs des côtés.

Somme des aires

d'une part $(2r_{\mathrm{ACB}})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

d'autre part

$$
\begin{aligned}
(2r_{\mathrm{AHC}})^2 &= (c_a + h + b)^2\\
(2r_{\mathrm{BHC}})^2 &= (c_b + h + b)^2
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{array}{rccccc}
(2r_{\mathrm{AHC}})^2 = & \boxed{c_a^2 + h^2} & +b^2 & +2c_a h & -2bc_a & -2bh\\
(2r_{\mathrm{BHC}})^2 = & c_b^2 + h^2 & +a^2 & +2c_b h & -2ac_b & -2ah\\
\hline
(2r_{\mathrm{AHC}})^2 + (2r_{\mathrm{BHC}})^2 = & \boxed{b^2} + a^2 & +c^2 & +2ch & -2bc_a & -\boxed{2bh}\\
 & & & & -\boxed{2ac_b} & -2ah
\end{array}
$$

Or $\dfrac{c_a}{h} = \dfrac{b}{a}$ donc $bh = \boxed{ac_a}$

et $\dfrac{h}{c_b} = \dfrac{b}{a}$ donc $ah = bc_b$

par ailleurs $ch = ab$

d'où $(2r_{\text{AHC}})^2 + (2r_{\text{BHC}})^2 = b^2 + a^2 + c^2 + 2ab - 2bc_a + 2bc_b - \boxed{2ac_b - 2ac_a}$

$(2r_{\text{AHC}})^2 + (2r_{\text{BHC}})^2 = b^2 + a^2 + c^2 + 2ab - 2bc - \boxed{2ac}$

donc $(2r_{\text{AHC}})^2 + (2r_{\text{BHC}})^2 = (2r^2_{\text{ACB}})$

Une meilleure idée (merci à Pierre Lointier)

Les triangles ABC, AHC et BHC sont isométriques

on a donc $k = \dfrac{c}{r_{\text{ABC}}} = \dfrac{b}{r_{\text{BHC}}} = \dfrac{a}{r_{\text{AHC}}}$

$a = k \cdot r_{\text{AHC}}$

$b = k \cdot r_{\text{BHC}}$

$c = k \cdot r_{\text{ABC}}$

comme $c^2 = a^2 + b^2$ on a $r^2_{\text{ABC}} = r^2_{\text{AHC}} + r^2_{\text{BHC}}$

SANGAKU

Version Xcas

merci à Cédric Coste et Matthieu Fonchain

Dans un repère orthonormé C(0 ; 0), A(xa ; 0) et B(0 ; yb)

```
/* ABC rectangle en C. H pied de la hauteur. */
/* (1) somme des rayons des cercles inscrits à AHC, BHC, ABC */
/* (2) relation entre les aires des disques inscrits */
C:=point(0)
assume(xa=1)
A:=point(xa,0)
assume(yb=2)
B:=point(0,yb)
H:=projection(line(A,B),C)
Cabc:=incircle(A,B,C)
Cach:=incircle(A,C,H)
Cbch:=incircle(B,C,H)
Rabc:=radius(Cabc)
Rach:=radius(Cach)
Rbch:=radius(Cbch)
Aabc:=normal(area(Cabc))
Aach:=normal(area(Cach))
Abch:=normal(area(Cbch))

normal(Aabc-Aach-Abch)
```

Commandes Xcas

aire, assume, inscrit, point, projection, rayon