CALCUL FORMEL

1. Utilisation

- Simplifier le calcul algébrique
- Calculer avec les nombres complexes
- Résoudre des systèmes d'équations
- Développer – factoriser des expression
- Décomposer en produit des facteurs premier
- Calculer avec fractions...

2. Les logiciels

Deux logiciels de calculs formels, gratuits et téléchargeables.
Pour les deux, il existe des forums très réactifs sur lesquels on peut librement poser des questions, il existe également une documentation assez complète en français !

Maxima le logiciel Maxima *http://maxima.sourceforge.net/*

pour des fichiers d'aide *http://michel.gosse.free.fr/*

L'auteur était très réactif.

Il existe une version pour Androïd !

Xcas le logiciel Xcas : *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html* (l'interface graphique est déroutante au début...)

Xcas en ligne : *http://xcasenligne.fr/*

pour les fichiers d'aide : *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html*

L'auteur est très réactif !

Il existe une version pour Androïd, mais pas dans GooglePlay...

GeoGebra Depuis la version 4, GeoGebra possède un module de calcul formel basé sur le noyau de Xcas.

Mais la syntaxe est différente et (de mon point de vue) les possibilités restent limitées. (attention : les commandes ne sont pas toujours les mêmes entre le module de géométrie et celui de calcul formel).

Pour les élèves, on garde un logiciel qu'ils connaissent.

On peut copier les formules en format LibreOffice !

J'ai une préférence pour Xcas... mais il peut être intéressant de jongler entre les trois : les algorithmes de calculs, les visuels... étant différents, certaines réponses seront plus faciles à obtenir avec l'un ou l'autre.

Remarques

- pour la multiplication, le symbole * ne peut pas être omis (sauf rares exeptions)
- les raccourcis clavier Ctrl-C, Ctrl-V permettent respectivement de copier et coller la sélection.

Pour la suite, nous allons travailler avec Xcas et/ou GeoGebra.

Pour Xcas, on peut découvrir des commandes à l'aide des menus *scolaire* ou dans le menu *aide* > *index*.
Les commandes existent en français et en anglais.

Exercices du DNB chercher les commandes à utiliser pour répondre aux questions ;
Exercices du BAC tester les commandes données en copies d'écran ;
Index à la fin de ce document, les commandes que j'ai utilisées (parmi de nombreuses autres disponibles !)

3. Quelques commandes

3.1 Exercices du DNB

Pondichéry – avril 2015 – exercice 1

	A	B	C
1. La forme développée de $(x-1)^2$ est :	$(x-1)(x+1)$	x^2-2x+1	x^2+2x+1
2. Une solution de l'équation : $2x^2+3x-2=0$ est ...	0	2	-2
3. On considère la fonction $f : x \mapsto 3x+2$. Un antécédent de -7 par la fonction f est...	-19	-3	-7

Pondichéry – avril 2015 – exercice 2

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.

Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :

- tous les paquets aient la même composition ;
- après mise en paquet, il reste ni œufs, ni poissons.

Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ?

Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet

Amérique du Nord – juin 2015 – exercice 1

	A	B	C
1. Quelle est l'écriture scientifique de $\dfrac{5\times10^6\times1{,}2\times10^{-8}}{2{,}4\times10^5}$?	25×10^{-8}	$2{,}5\times10^{-7}$	$2{,}5\times10^3$
2. Pour $x=20$ et $y=5$, quelle est la valeur de R dans l'expression $\dfrac{1}{\text{R}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$	0,25	4	25

Amérique du Nord – juin 2015 – exercice 4

Trouver le nombre auquel je pense.

- Je pense à un nombre
- Je lui soustrais 10
- J'élève le tout au carré
- Je soustrais au résultat le carré du nombre auquel j'ai pensé.
- J'obtiens alors −340.

Amérique du Nord – juin 2015 – exercice 6 (extraits)

À l'issue de la 18^e étape du tour de France cycliste 2014, les coureurs ont parcouru 3 260,5 kilomètres depuis le départ. Le classement général des neuf premiers coureurs est le suivant :

Nibali Vicenzo	80 h 45 mn
Pinot Thibault	80 h 52 mn
....	.....
Konig Léopold	81 h

1. Calculer la différence entre le temps de course de Léopold Konig et celui de Vincezo Nibali.
2. Quelle est la vitesse moyenne en km·h^{-1} du premier français Thibaut Pinot ? Arrondir la réponse à l'unité.

Polynésie – juin 2015 – exercice 4

2 048 est une puissance de 2. Laquelle ?

Polynésie – juin 2014 – exercice 4

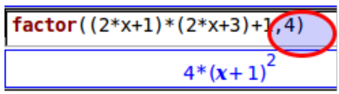
Deux affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.
Affirmation 1 : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.

Affirmation 2 : $\sqrt{2}^{50}$ et $\sqrt{2}^{100}$ sont des nombres entiers.

Métropole - Antilles - Guyane – sept. 2014 – exercice 5

Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

Dans Xcas, on peut préciser qu'on veut factoriser par 4.



3.2 Exercices du BAC

S – Pondichéry – avril 2014 - exercice 2

g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

Proposition 2 Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.

```
g(x):=2*x*ln(2*x+1)
// Interprète g
// Succès lors de la compilation g
        x -> 2*x*ln(2*x+1)
assume(x>-1/2);solve(g(x)=2*x,x)
        (x, [0, (exp(1)-1)/2] )
solve(x+3=0,x)
        []
purge(x)
        [[], [-1/2, +∞], [-1/2]]
solve(x+3=0,x)
        [-3]
```

Proposition 3 Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

```
g'(1/2)
        2*ln(2)+1
(2*ln(2)+1)==(1+ln(4))
        faux    ?!?
```

```
g'(1/2)
→  2 ln(2) + 1
2*ln(2)+1==1+ln(4)
→  true
```

Xcas est en constante amélioration : depuis le signalement de ce « bug », on obtient une explication !

```
(2*ln(2)+1)==(1+ln(4))
Warning, the test a==b is performed by checking
that the internal representation of regroup(a-b) is not 0.
Therefore a==b may return false even if a and b are mathematically equal,
if they have different internal representations.
You can explicitly call a simplification function like simplify(a-b)==0 to avoid this.
faux
simplifier((2*ln(2)+1)-(1+ln(4)))==0
vrai
```

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

Proposition 4 Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ se coupent perpendiculairement.

GeoGebra permet de construire la figure, idées :

- plans sont définis par leur équation
- point dans un plan
- perpendiculaire à un plan passant par un point donné
- mesure d'un angle

MAIS on ne démontre rien...

Xcas va effectuer les calculs en valeurs exactes : il démontre !

S – Pondichéry – avril 2014 - exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0=1$ et $z_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. ...

4. a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
   b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   c) ...

CALCUL FORMEL

```
z:=3/4+sqrt(3)/4*i
```

$$(\sqrt{3})*\frac{1}{4}*i+\frac{3}{4}$$

```
normal(abs(z)); arg(z)
```

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{6}\right)$$

```
resoudre_recurrence(z(n+1)=(3/4+sqrt(3)/4*i)*z(n),z(n),z(0)=1)
```

$$\left[\left(-\frac{(\sqrt{3})*(-i)-3}{4}\right)^{n}\right]$$

```
normal(abs((-(sqrt(3)*(-i)-3)/4)^n))
```

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
r(n):=((sqrt(3))/2)^n
```

// Interprète r
// Succès lors de la compilation r

$$n\ \text{->}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
limite(r(n),n,+infinity)
```

$$0$$

```
z(n):=(-(sqrt(3)*(-i)-3)/4)^n
```

// Interprète z
// Succès lors de la compilation z

$$n\ \text{->}\left(\frac{-((\sqrt{3})*(-i)-3)}{4}\right)^{n}$$

```
est_rectangle(0,z(n),z(n+1))
```

$$3$$

```
Z:=(sqrt(3)/2)^n*e(i*pi/6*n)
```

$$\exp(1)*\exp\left(\frac{i*n*\pi}{6}\right)*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
im(Z)
```

$$\exp(1)*\sin\left(\frac{n*\pi}{6}\right)*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

```
solve(im(Z)=0,n)
```

$$[0,\ 6]$$

```
solve(re(Z)=0,n)
```

$$[-3,\ 3]$$

a:=3/4+sqrt(3)/4* ί

$$\rightarrow\ \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\,\imath+3\right)$$

Alt-i pour le i complexe

abs(a)

$$\rightarrow\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

arg(a)

$$\rightarrow\ \frac{1}{6}\pi$$

Limite[(sqrt(3)/2)^n, +inf]

$$\rightarrow\ 0$$

Z:=(sqrt(3)/2)^n* e^(ί* π /6*n)

$$\rightarrow\ e^{\frac{\imath}{6}n\pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{n}$$

Alt-p pour pi
Alt-e pour exp

Im(Z)

$$\rightarrow\ \sin\left(\frac{1}{6}n\pi\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{n}$$

Résoudre[Im(Z)=0, n]

$$\rightarrow\ \{n=6k_1\}$$

Résoudre[Re(Z)=0, n]

$$\rightarrow\ \{n=6k_2+3\}$$

Exercice 4

Partie A f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. ...

2. ...

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a) Déterminer la valeur de b... (On trouve rapidement $b = 1$)
   b) Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour le plaisir de travailler avec des fonctions a deux variables...

```
f(a,x):=e^(-x)+a*x+1
// Interprète f
// Succès lors de la compilation f
                    (a, x )-> exp(-x)+a*x+1
f1:=unapply(diff(f(a,x),x),[a,x])
                    (a, x )->-exp(-x)+a
solve(f1(a,0)=1,a)
                    [2 ]
solve(f1(2,x)>=0,x)
                    [x>=(-ln(2)) ]
limite(f(2,x),x,+infinity)
                    + ∞
```

```
f(a,x):= e ^(-x)+a*x+1
→ f(a, x) := e^(−x) + a x + 1
f_1(a,x):=Dérivée[f, x]
→ f₁(a, x) := −e^(−x) + a
Résoudre[f_1(a, 0) = 1,a]
→ {a = 2}
Résoudre[f_1(2,x)>=0,x]
→ {x ≥ − ln (2)}
Limite[f(2, x), x,+inf]
→ ∞
```

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b) ...

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

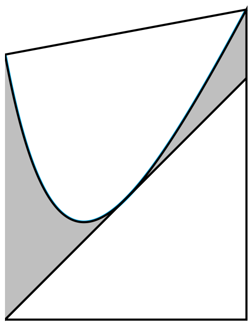


figure 2

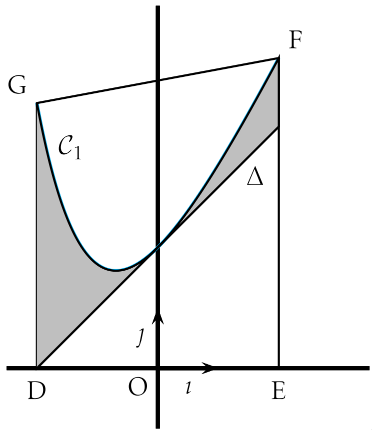


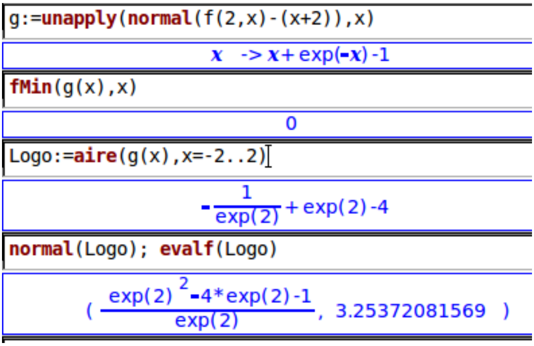
figure 3

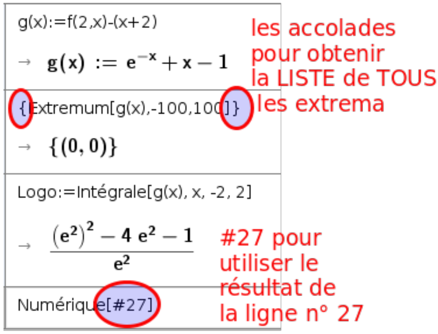
Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$
- E est le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$

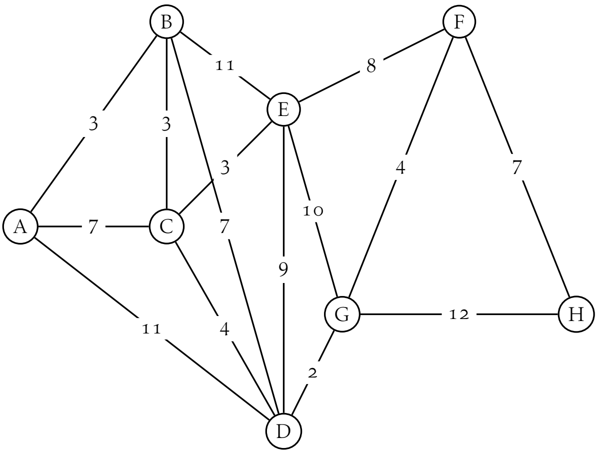
La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).



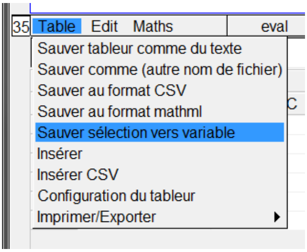


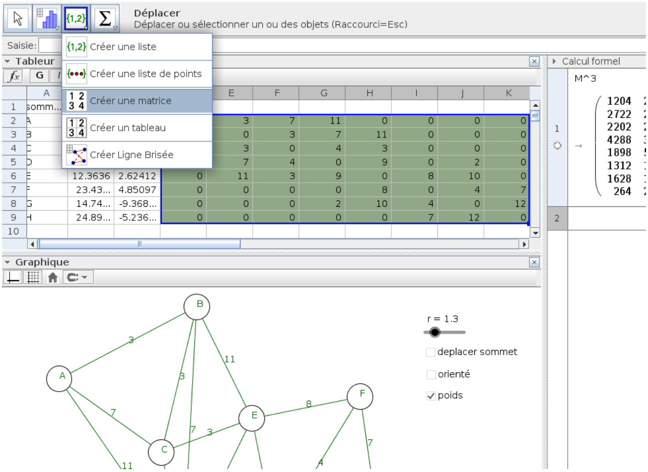
ES – Pondichéry – avril 2012



On appelle M la matrice associée au graphe, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique …
Calculer M^4, M^{10}…

CALCUL FORMEL





pour trouver la matrice associée à un graphe :

- un utilitaire de l'IREM de la Réunion : *http://irem.univ-reunion.fr/IMG/html/graphes_css.html*
- pour manipuler des graphes : le logiciel Grin. Je ne le trouve plus sur le net, je l'ai copié ici : *http://frederic.leon77.free.fr* rubrique logiciels.
- pour obtenir le code LaTeX de la matrice associée à un graphe et avec mise en forme de ce dernier : le logiciel Geophar (dans *Outils* > *options* > *modules*) *http://sourceforge.net/projects/geophar/*
- pour dessiner un graphe à partir de la matrice des poids des arêtes : une feuille GeoGebra à améliorer *http://frederic.leon77.free.fr* rubrique logiciels.
- pour avoir une image d'une formule LaTeX en différents formats : *http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php*
  ou copier la formule dans une zone de texte GeoGebra et exporter l'image.
  ou utiliser la commande *importer LaTeX depuis le presse-papier* de l'extension Cmath *http://cdeval.free.fr/*.

Commandes Xcas

algèbre
égalité ==

algèbre
developper
evalf
factoriser (factor)
mise en forme
normal
resoudre (solve)
subst

analyse
aire
fMin
limite

arithmétique
idivis
ifactor
PCGD (gcd)

complexes
abs
arg
im, re

constante
+infinity
e
i
π

conversion
convert

fonction
dérivée : opérateur ’
dérivée : diff
limite
sqrt (racine carrée)
unapply

géométrie
est_rectangle
est_perpendiculaire (2D ou 3D)
plan

suites
resoudre_recurrence (rsolve)

unités de mesure
le temps (_h, _mn, _s)
les distances (_km, _m)

variable
affectation :=
purge
supposons (assume)
type

Commandes GeoGebra