GÉOMÉTRIE 2D

Mise à jour des liens : janvier 2016

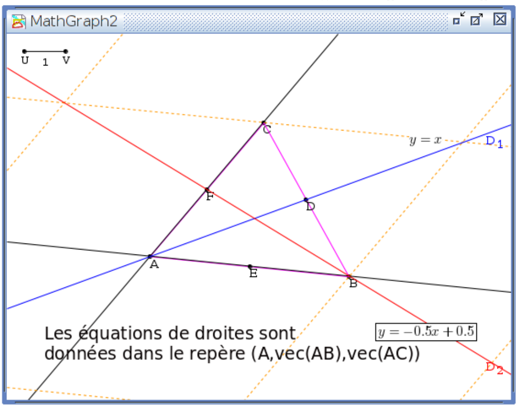
1. Les logiciels

Il existe un grand nombre de logiciels de géométrie dynamique, dont beaucoup téléchargeables gratuitement (en voici quelques uns parmi d'autres avec leurs points forts). Sauf précision ces logiciels sont portables : ils peuvent fonctionner à partir d'une clef USB sans être installé sur l'ordinateur !

GeoGebra [1] 2 écrans graphiques + tableur + calcul formel (on verra de nombreuses spécificités au cours du stage)

GéoPlanW et GéoSpaceW [2] possibilité d'écrire en français le texte définissant la figure

Mathgraph32 [3] permet de travailler avec un repère quelconque



CaRMetal [4] facilité d'écriture des macros / chaîne YouTube

1. *www.geogebra.org* - cliquer sur *Infos téléchargement* pour trouver les versions portables
2. *http://ancien.aid-creem.org/telechargement.html*
3. *http://mathgraph32.org* - portable en téléchargeant la version Linux (même sous Windows)
4. *http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/*
1. *http://sourceforge.net/projects/geophar/*

Geophar[1] possibilité d'avoir le papier millimétré en fond + courbe avec les « rond-crochets » pour respecter les ensembles de définition

TEP[2] possibilité d'écrire le texte en français + extension Open/Libre Office + à compléter avec IePCapt sur le site d'Emmanuel Ostenne[3])

Xcas[4] couple le calcul formel avec la géométrie !

2. Le fonctionnement

Le principe est toujours le même :

Sur une « feuille » de dessin on place des points dits « libres » .

À partir de ceux-ci on construit une figure géométrique : les objets géométriques ainsi obtenus sont liés aux points libres.

Chaque logiciel apporte ses spécificités et son ergonomie, mais les fonctions de base sont souvent les mêmes.

exemple

pour construire le centre de gravité d'un triangle, il faut d'abord placer les 3 sommets (libres) puis construire deux médianes (définies en fonction des sommets, donc liées) et enfin construire leur intersection (liée).

Suivant le logiciel utilisé, l'outil *médiane*, l'outil *couper un segment en 3*, l'outil *centre de gravité*, l'outil *barycentre*, l'utilisation de la notation de Grassmann ... peuvent exister ou non.

Certains logiciels permettent « de décrire la figure » puis de demander le dessin, d'autres ne travaillent qu'avec la souris, certains combinent les deux possibilités... C'est l'habitude et la nature problème qui influenceront le choix du logiciel.

2. *http://tracenpoche.sesamath.net/flash/*
3. *http://emmanuel.ostenne.free.fr/declic/*
4. *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html*

3. L'intérêt

Les points libres sont mobiles sur la feuille et les points liés conservent leurs propriétés (un milieu sera toujours un milieu). Cela permet d'émettre des conjectures, de chercher des lieux géométriques, de trouver une position particulière pour un point...

4. Quelques exercices

4.1 Le laboureur

Travaillez, prenez de la peine :
C'est le fond qui manque le moins.
Un riche Laboureur, sentant sa mort prochaine,
Fit venir ses enfants, leur parla sans témoins.

Gardez-vous, leur dit-il, de vendre l'héritage
Que nous ont laissé nos parents.
Un trésor est caché dedans.
Je ne sais pas l'endroit ; mais un peu de courage

Et de mathématiques, vous le fera trouver
Dans le champ, celui qui est bordé par trois routes.
C'est un triangle équilatéral sans aucun doute.
L'endroit du trésor a une étrange particularité :

Va au plus court à chacune des routes,
En ajoutant à chaque fois tous tes pas.
Si tu as trouvé le nombre le plus bas,
Alors du trésor tu es parti, aucun doute !

Le père mort, les fils vous retournent le champ

Deçà, delà, partout ; si bien qu'au bout de l'an
Il en rapporta davantage.
D'argent, point de caché. Mais le père fut sage

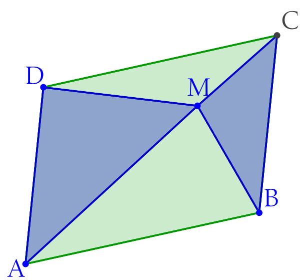
De leur montrer avant sa mort
Que le travail est un trésor.

- ◇ Construire un triangle équilatéral ABC.
- ◇ Placer un point M à l'intérieur du triangle.
- ◇ Faire afficher la somme des distances de M aux côtés du triangle.
- ◇ Émettre une conjecture, puis la démonter.

4.2 Avec un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme ; on cherche à placer le point M à l'intérieur tel que : $\mathscr{A}(\text{AMD}) + \mathscr{A}(\text{BMC}) = \mathscr{A}(\text{AMB}) + \mathscr{A}(\text{DMC})$

- ◇ Construire ABCD parallélogramme
- ◇ Placer un point M
- ◇ Faire afficher les sommes $\mathscr{A}(\text{AMD}) + \mathscr{A}(\text{BMC})$ et $\mathscr{A}(\text{AMB}) + \mathscr{A}(\text{DMC})$.
- ◇ Émettre une conjecture, puis la démontrer.



remarques

- les points A, B et C sont libres, GeoGebra permet de définir le point C par $C = A + B - A + D - A$ (soit $C = B + D - A$) c'est à dire $C = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- avec Xcas, la fonction `P:=parallelogramme(A,B,C)` permet d'obtenir le parallélogramme P défini par $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; pour obtenir D : `D:=sommets(P)[3]`
- pour les calculs dans GGB :
  - fenêtre d'affichage et champs de saisie

  - tableur (voir aussi Cédric Villani)
  - en objet texte :

    $\mathscr{A}_{\text{ADM}} + \mathscr{A}_{\text{BMC}} =$

    puis insérer un champ dynamique vide (touche Alt + Entrée ; pour entrer dans un champ : Alt + Flèche) pour y écrire `aire[A,M,D]+aire[B,M,C]`. Attention à faire afficher les aires de chaque triangle, la somme étant constante, on ne *voit* rien...

- en collège, prendre le rectangle comme parallélogramme particulier pour simplifier.

4.3 Cédric

LE PROGRÈS.fr
Jeudi 24 janvier 2013Mercredi 8 décembre 2010 Suivez l'actualité du Progrès avec

Comment Cedric est devenu génie des maths

publié le 14.09.2010 | 04h00

« C'était au lycée je crois. Le jour où j'ai appris que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme était égale à la somme des carrés des deux longueurs... Je me suis dit, c'est magnifique ! ». L'un des premiers coups de foudre mathématiques de Cédric Villani. Une vingtaine d'années plus tard, le voilà médaillé Fields. Remise tous les quatre ans à des chercheurs de moins

« la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme était égale à la somme des carrés des deux longueurs... »

À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire une figure permettant de vérifier cette affirmation.

Corriger la phrase du journaliste... et la démontrer !

4.4 TOI=MOI

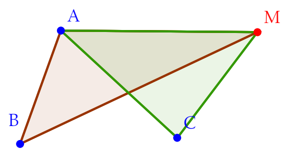
On veut placer, si cela est possible, un point I à l'intérieur du triangle MOT, tel que l'aire du triangle MOI soit égale à celle de TOI.

- Chercher le point I (ou l'ensemble des points I) solution.
- Émettre une conjecture, puis la démontrer.

4.5 Un « aire » de déjà vu ?

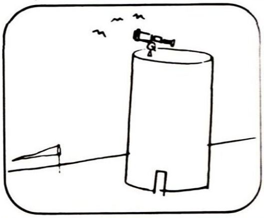
A, B, C sont trois points distincts.
On cherche le lieu des points M du plan tels que les triangles ABM et ACM aient la même aire.

- Chercher le point M (ou l'ensemble des points M) solution.
- Émettre une conjecture, puis la démontrer.

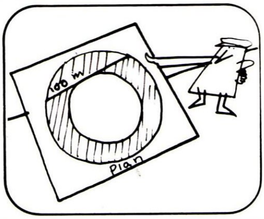


4.6 Une question sur le tapis

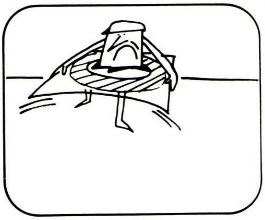
« Ha Ha » ou l'éclair de compréhension mathématique (Martin Gardner)



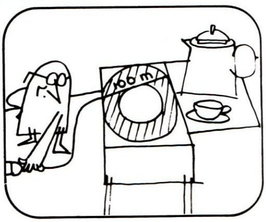
L'entreprise de pose de moquette, Marcel Hauket et Cie., est chargée de poser une moquette dans le couloir en forme d'anneau d'un nouvel aéroport.



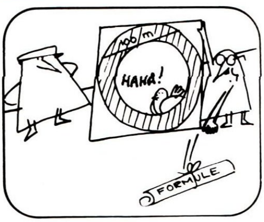
M. Hauket pique une colère devant les plans. La seule mesure indiquée est la longueur d'une corde tangente au mur intérieur.



M. Hauket : Comment voulez-vous que j'évalue le coût du tapis si je ne connais pas la surface du couloir ? Je suis obligé de consulter mon dessinateur, M. Zweistein !
M. Zweistein, habile géomètre, ne s'énerve pas.



M. Zweistein : Ne vous en faites pas, M. Hauket. Je n'ai qu'à introduire la longueur de cette corde dans une de mes formules et je trouverai l'aire du couloir.
M. Hauket reste perplexe un bon moment avant de sourire.



M. Hauket : Merci, M. Zweistein, mais je n'ai plus besoin de vous ni de votre formule. Je n'ai pas non plus besoin de connaître les périmètres des deux cercles. Je peux vous donner le résultat immédiatement.
Quel est le raisonnement de M. Hauket ?

- Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie : deux cercles concentriques de diamètre variable avec une corde du cercle extérieur tangente au cercle intérieur.
- On doit pouvoir choisir la longueur de la corde et changer les diamètres des cercles et obtenir l'aire de la couronne.
- Émettre une conjecture, puis la démonter.

Suivant la recherche de construction de la figure, l'utilisation d'un logiciel peut s'avérer totalement inutile !

Pour le plaisir d'utiliser des logiciels, nous allons donc suivre ce protocole de construction :

- on se donne un segment [AB] de milieu I et de longueur d : il représente la corde.
- le point Ω, centre des cercles concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ délimitant la couronne, est donc sur la médiatrice de [AB].
- $\mathscr{C}_1$ est le cercle de rayon ΩI, tangent à [AB] et le cercle $\mathscr{C}_2$ est le cercle de rayon ΩA.

Avec le module de géométrie de Xcas : on entre une instruction par ligne dans un module de géométrie. On profite du repère pour construire la figure.

```
supposons(d=4);
A:=point(-d/2,0);
B:=point(d/2,0);
I:=point(0,0);
supposons(r=1);
W:=point(I,r);
C1:=cercle(W,r);
C2:=cercle(W,distance(W,A));
```

(on peut faire afficher les lettres grecques grâce au tableau de caractères.)

puis dans une ligne de calcul on tape : (parfois il vaut mieux purger les variables avant d'effectuer un calcul)

`AireC:=aire(C2)-aire(C1)` (+ menu contextuel).

4.7 Trois droites, un point c'est tout !

Cet exercice est de nouveau d'actualité grâce (?) aux nouveaux programmes de collège ! [1]

ABC est un triangle quelconque fixé.
M un point quelconque mobile du plan.
A′, B′, C′ sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB].

- d_1 est la droite parallèle à la droite (MA) et contenant le point A′.
- d_2 est la droite parallèle à la droite (MB) et contenant le point B′.
- d_3 est la droite parallèle à la droite (MC) et contenant le point C′.
- M′ est le point de concours des droites d_1, d_2 et d_3. *Il faudrait peut-être démontrer que ces droites sont concourantes ;-)*

Quelle est la transformation géométrique qui transforme M en M′ ?

figure avec GGB

Résolution avec Xcas
Écrire chaque commande dans une ligne en module géométrie.

1. la version *Epreuve pratique au Bac S* est sur le site académique http://maths.ac-creteil.fr/spip.php?article68&lang=fr

`supposons(xa=1)`	on initialise pour voir la figure
`assume(ya=5)`	en anglais…
`supposons(xb=-3)`	
`supposons(yb=-1)`	
`supposons(xc=3)`	
`supposons(yc=-4)`	
`supposons(xm=2)`	
`supposons(ym=2)`	
`A:=point(xa,ya))`	
`B:=point(xb,yb)`	
`C:=point(xc,yc)`	
`Tr:=triangle(A,B,C)`	
`C1:=milieu(A,B)`	C1 car *prime* est l'opérateur de dérivation
`A1:=midpoint(B,C)`	en anglais
`B1:=milieu(A,C)`	
`M:=point(xm,ym)`	
`d1:=parallele(A1,droite(A,M))`	
`d2:=parallele(B1,droite(B,M))`	
`d3:=parallel(C1,line(C,M))`	en anglais, ça fonctionne aussi
`M1:=inter_unique(d1,d2)`	deux droites ont un unique point d'intersection
`M2:=single_inter(d2,d3)`	en anglais
`eval(M1-M2)`	on teste l'égalité
`[[xg,yg]]:=resoudre(coordonnees(M)= coordonnees(M1),[xm,ym])`	on résous le système pour connaître les coordonnées de I (point invariant) en fonction de celles de M.
`G:=point(xg,yg)`	
`vGM:=vecteur(G,M)`	coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$
`vGM1:=vector(G,M1)`	en anglais

puis dans des lignes de calculs :
`coordinates(G)` pour trouver l'expression des coordonnées du point G, après simplification on reconnaît...
`solve(coordinates(vGM)=k*coordinates(vGM1),k)` pour trouver le rapport d'homothétie.

remarques

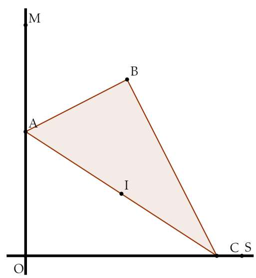
a) ligne 22 : l'énoncé dit que les 3 droites sont concourantes : on *démontre* que c'est vrai, puisque Xcas travaille avec les expressions algébriques !

b) ligne 23 : il faut parfois faire attention à la nature des réponses de Xcas qui changent d'une version à l'autre :-(
On voit (dans la ligne réponse – en bleu –) que dans cette version Xcas répond `list[[-((-xc-xb-xa)*1/3*2)/2,-((-yc-yb-ya)*1/3*2)/2]]` c'est à dire une liste qui contient une liste de deux éléments.

4.8 À partir d'une équerre [1]

Le triangle ABC représente une équerre telle que AB = 3, AC = 6 et l'angle B est droit. Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites [OM) et [OS).
Le point I est le milieu du segment [AC].

On s'intéresse aux lieux des points I et B.



◇ Observer les propriétés de la figure.
Avec un logiciel de géométrie dynamique, construire une figure répondant à la situation.

1. sujets proposés pour l'expérimentation en TS – janvier 2007 – n° 12 voir http://maths.ac-creteil.fr

◇ Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite [OS).
Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

◇ Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite [OS).
Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

remarque : la démonstration fait intervenir les points cocycliques qui ne sont plus au programme : il faudra adapter la démonstration géométrique en travaillant avec les nombres complexes par exemple.

Cas général avec Xcas

`assume(ya=2)`	on initialise pour voir la figure
`A:=point(0,ya)`	
`assume(r=6)`	
`C1:=cercle(A,r)`	r est un réel : le centre est A, le rayon est r
`C:=(inter(droite(y=0),C1))[0]`	le 0 permet de choisir entre les 2 points d'intersection
`I:=milieu(A,C)`	
`C2:=cercle(A,C)`	C est un point : le cercle est défini par son diamètre [AC]
`C3:=cercle(A,3)`	
`B:=(inter(C2,C3))[1]`	
`T:=triangle(A,B,C)`	

puis dans des lignes de calcul

```
normal(ordonnee(B)/abscisse(B))

normal(coordonnees(I))
```