Voici un énoncé de TP donné à une classe de 1ère S ainsi qu'une grille de correction élaborée suite à la lecture des productions des élèves. Ces productions sont accompagnées de commentaires pris sur le vif par l'enseignant lorsqu'il circulait dans les groupes. L'enseignant a prévu des coups de pouce écrits (en cas de sèche ou blocage). ***En groupe,***

- ✓ *évaluer, grâce à la grille proposée, les productions de chaque groupe.*
- ✓ *Suite à cette correction, proposer éventuellement quelques améliorations/changements de cette grille si vous les jugez nécessaires.*

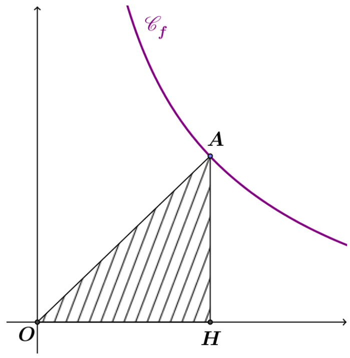
Énoncé ■ Problème d'optimisation — 1ère S

Dans un repère orthonormé du plan, un point A d'abscisse strictement positive se promène sur la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\mathscr{C} \quad : \quad y = \frac{1}{4x^3 - 3x^2 + 5x}.$$

On note O l'origine du repère et H le projeté orthogonal du point A sur l'axe des abscisses. On s'intéresse à la surface du triangle rectangle OAH hachuré sur la figure ci-contre.

Où placer le point** A **de sorte à maximiser l'aire du triangle** OAH **?



Consignes — ***Travail de groupe***

- ✓ *Réfléchir à une démarche possible pour émettre des conjectures et proposer une résolution de ce problème*
- ✓ *Commencer à mettre en œuvre les démarches proposées. Vous pouvez, pour cela, utiliser tous les outils à votre disposition : calculatrice, logiciels, outils de géométrie...*

Une proposition de grille d'évaluation

Acquis, en **V**oie d'**A**cquisition, **N**on **A**cquis, **N**on **E**valué

Compétences	Observables possibles	Degré d'acquisition
Chercher	**Mise en place de démarches** : le groupe se lance dans une démarche d'investigation plus ou moins experte : ❏ ils procèdent à des essais successifs ❏ exploitent les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique pour exploiter la situation ❏ exploitent les fonctionnalités d'un tableur pour automatiser des calculs ❏ proposent une algébrisation du problème ❏ utilisent les fonctionnalités de la calculatrice pour déterminer un extremum d'une fonction **Émission d'une conjecture au problème posé** : la procédure mise en place par le groupe permet d'émettre une conjecture au problème posé	
Représenter	**Utilisation de changements de cadre** : les élèves ❏ ramènent l'étude du problème à l'étude d'une fonction ❏ exploitent la représentation graphique d'une fonction pour conjecturer une solution au problème ❏ ramènent le problème à une résolution d'inéquation ou à l'étude des variations d'une fonction	
Calculer	**Exercer l'intelligence du calcul** : les élèves ❏ ramènent l'étude du problème à l'étude des variations d'une fonction du type $\frac{1}{u}$ où u est une fonction dont ils savent étudier les variations par des techniques élémentaires ❏ ramènent l'étude du problème à la résolution d'une inéquation en se ramenant à une étude de signes	
Communiquer	**Rédiger une démonstration** : les élèves ❏ développent une argumentation mathématique correcte et complète **Faire preuve d'esprit critique** : les élèves ❏ confrontent la solution déterminée algébriquement à la conjecture émise grâce aux outils logiciels/à la calculatrice	

Coups de pouces éventuels envisagés

Coup de pouce n° 1

Quels sont les objets mobiles du problème ? Quelles démarches et/ou outils (logiciels et/ou calculatrice) pourraient permettre d'émettre une conjecture au problème posé ? Comment ?

Coup de pouce n° 2

En notant x l'abscisse du point A, exprimer l'aire du triangle hachuré en fonction de x puis proposer une réponse au problème posé.

Coup de pouce n° 3

On pourra montrer, en notant x l'abscisse du point A que l'aire du triangle hachuré est donnée par la formule

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{8x^2 - 6x + 10}.$$

Étudier les variations de cette fonction $\mathscr{A}$ puis conclure.

Contexte de l'activité

Conditions matérielles :

✓ L'activité est proposée en module dans une salle équipée de 10 postes informatiques (utilisables si besoin).

✓ Après un temps de réflexion individuelle, les élèves sont invités à former des groupes de 3 à 4 élèves et à échanger sur les démarches envisagées lors de la phase de réflexion individuelle.

✓ Un compte-rendu sera ramassé à la fin de la séance.

Objectifs TICE & mathématiques :

✓ Émettre des conjectures à l'aide d'outils logiciels et/ou de la calculatrice

✓ Opérer des changements de cadres (graphique, algébrique, fonctionnel...)

✓ Exploiter les résultats concernant les variations des fonctions $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u}$ lorsque les variations de u sont connues.

Compte-rendu du Groupe A

Il semble que l'aire du triangle OAH soit maximal lorsque OH est égal à 0,38.

A (x ; f(x))

$$A = \frac{f(x) \times x}{2} = \frac{\frac{1}{4x^3 - 3x^2 + 5x} \times x}{2}$$

$$= \frac{\frac{x}{4x^3 - 3x^2 + 5x}}{2}$$

$$= \frac{x}{(4x^3 - 3x^2 + 5x)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x}{8x^3 - 6x^2 + 10x}$$

$$= \frac{x}{2x(4x^2 - 3x + 5)} \quad \text{ou} \quad \frac{\cancel{x}}{x} \times \left(\frac{1}{8x^2 - 6x + 10} \right)$$

$$= \frac{1}{2(4x^2 - 3x + 5)} = \frac{1}{8x^2 - 6x + 10}.$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{16} = 0,375$$

Informations concernant la démarche du Groupe A

Le groupe s'est tout d'abord interrogé sur les objets fixes et mobiles du problème.

Les élèves ont alors envisagé de placer le point A tel que le point H soit proche de O mais cette idée a très vite été abandonnée. L'exploitation de la figure papier s'est révélée difficile et le groupe a décidé très vite d'ouvrir une session Geogebra pour conjecturer plus facilement une solution au problème.

Le groupe a alors émis une conjecture (écrite sur le compte-rendu) et s'est interrogé sur une démonstration de ce résultat par l'algèbre. Le coup de pouce n°2 a été distribué au groupe pour débloquer cette phase du travail. La poursuite du calcul s'est faite sans aide additionnelle.

Le groupe a ensuite exploité la représentation graphique et la fonction "max" de la fonction aire $\mathscr{A}$ pour déterminer le maximum de cette fonction. Le compte-rendu se termine par le calcul de x_{max} sans explication de la démarche.

Compte-rendu du Groupe B

On a $A = \frac{b \times h}{2}$

Or b = abscisse de H = x
h = ordonnée de A = f(H) = f(x)

D'où

$$A = \frac{x \times \frac{1}{4x^3-3x^2+5x}}{2}$$

$$= \frac{\frac{x}{x(4x^2-3x+5)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4x^2-3x+5}}{2} = \frac{1}{8x^2-6x+10}$$

le extremum.
Calcul de la valeur où est atteint V de $x \mapsto 8x^2-6x+10$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

D'où

x	0		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
variations de $8x^2-6x+10$		↘		↗	

Or f est de signe constant et est de forme inverse. Donc le sens des variations est inversé.

D'où

x	0		$3/8$		$+\infty$
variations de $f(x)$		↗	$\frac{128}{213}$	↘	

et $f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4\times\left(\frac{3}{8}\right)^3 - 3\times\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 5\times\frac{3}{8}} = \frac{128}{213}$

Informations concernant la démarche du Groupe B

> *Les élèves se sont directement lancé dans la phase d'algébrisation puis dans l'étude des variations de l'aire $\mathscr{A}$.*
>
> *Les élèves ont ensuite ressenti le besoin de vérifier leur résultat. L'un a utilisé la calculatrice mais un autre élève a suggéré d'utiliser Geogebra craignant que la formule exprimant l'aire ne soit erronée. L'exploitation de la figure les a conforté dans leur démarche.*

Compte-rendu du Groupe C

Mathematiques

Il faut determiner la formule de l'aire du triangle :

$$A(T) = \frac{OH \times AH}{2}$$

$$= \frac{OH \times \frac{1}{4x^3-3x^2+5x}}{2} = \frac{\frac{x}{4x^3-3x^2+5x}}{2} = \frac{x}{8x^3-6x^2+10x} = \frac{1}{8x^2-6x+10}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$	$+\infty$
var $8x^2-6x+10$	$\searrow$	$A\left(\frac{3}{8}\right)$	$\nearrow$
var $\frac{1}{8x^2-6x+10}$	$\nearrow$	$\frac{8}{71}$	$\searrow$

$A\left(\frac{3}{8}\right) \simeq 0,112 = \frac{8}{71}$

Il y a donc un maximun a $\frac{3}{8}$

Determinons les coordonés de A :

$$f(x) = \frac{1}{4x^3-3x^2+5x}$$

$$f(A) = \frac{1}{4\times0,375^3 - 3\times0,375^2 + 5\times0,375} = 0,601$$

l'aire est maximale pour $A(0,375 ; 0,601)$.

Informations concernant la démarche du Groupe C

> *Le groupe s'est focalisé sur la figure papier en envisageant mentalement le comportement du triangle rectangle selon les positions du point A : " lorsque AH diminue, OH augmente et vice-versa. Le triangle a tendance à s'aplatir lorsque OH ou AH deviennent trop grands. ", "L'aire sera maximale lorsque A sera dans la zone là (l'élève indiquant l'endroit en question)".*
>
> *Les élèves se sont ensuite lancé dans la phase d'algébrisation puis dans l'étude des variations de l'aire $\mathscr{A}$. Après un calcul de discriminant infructueux car ne permettant pas de conclure (ce calcul n'apparaît pas dans le compte-rendu mais a été effectué au brouillon), ils ont invoqué le résultat concernant les variations des fonctions du 2nd degré vu en début d'année.*
>
> *Les élèves se sont enfin lancé dans le calcul des coordonnées du point A solution.*