



Voici un énoncé d'activité donné à une classe de Tale S ainsi qu'une grille de correction élaborée suite à la lecture des productions des élèves. Ces productions sont accompagnées de commentaires pris sur le vif par l'enseignant lorsqu'il circulait entre les groupes.

ÉNONCÉ ÉLÈVE

Tale S

Problème Un partage équitable...

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x$. On considère également le domaine \mathcal{D} du plan délimité par cette parabole et l'axe des abscisses.

Peut-on trouver une droite passant par l'origine O du repère de sorte qu'elle partage le domaine \mathcal{D} en deux sous-domaines de même aire ? Indiquer votre (vos) démarche(s).

Consignes :

Réfléchir à une méthode ou des méthodes pour résoudre ce problème et les mettre en œuvre : rédiger et faire apparaître sur votre compte-rendu toutes traces de recherche même si elles n'aboutissent pas.

Contexte de l'activité

Place de cette activité dans la progression annuelle :

- ✓ Le chapitre sur le calcul intégral a été traité plus tôt dans l'année. Le chapitre traité lorsque cette activité a été posée portait sur les lois de probabilité continues à densité. Ainsi, cette activité, posée lors d'une séance d'AP en demi-groupe, n'avait aucun lien avec le chapitre en cours. Les élèves ont dû solliciter des notions antérieures.
- ✓ Les élèves ont l'habitude, dès la classe de première, de travailler sur des problèmes à prise d'initiatives.

Conditions matérielles :

- ✓ L'activité est proposée en module dans une salle équipée de 10 postes informatiques (utilisables si besoin).
- ✓ Après un temps de réflexion individuelle (15 minutes), les élèves sont invités à former des groupes de 3 à 4 élèves et à échanger sur les démarches envisagées lors de la phase de réflexion individuelle.
- ✓ Un compte-rendu sera ramassé à la fin de la séance (séance de 55 minutes) dans chacun des groupes.

Compétences mises en jeu et (éventuellement) évaluables :

- ✓ Mettre en place des démarches, même si elles n'aboutissent pas
- ✓ Émettre des conjectures en utilisant, si besoin, des outils logiciels et/ou la calculatrice
- ✓ Opérer des changements de cadres (graphique, algébrique, fonctionnel...)

Stage : "NAECATA : LA formule magique pour évaluer par compétences ?"
 Une proposition de grille d'évaluation



Acquis, en Voie d'Acquisition, Non Acquis, Non Evalué

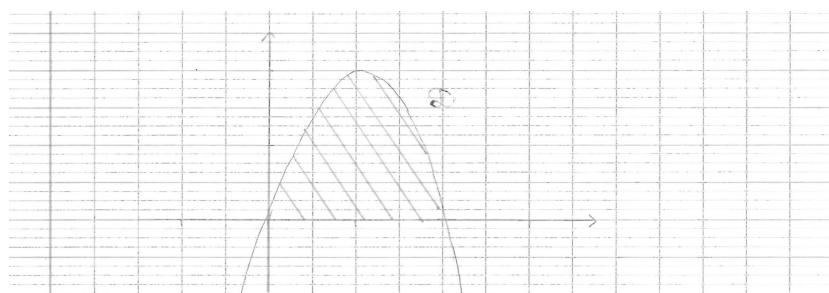
Compétences	Observables possibles	Degré d'acquisition
Chercher	<p>Mise en place de démarches : le groupe se lance dans une démarche d'investigation plus ou moins experte : les élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> s'approprient le problème : ils localisent les invariants et les objets qui varient <input type="checkbox"/> exploitent les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique pour explorer la situation <input type="checkbox"/> proposent une algébrisation du problème <input type="checkbox"/> utilisent les fonctionnalités de la calculatrice et/ou d'un logiciel de calcul formel <input type="checkbox"/> estiment les difficultés rencontrées et proposent des pistes pour y palier <hr/> <p>Émission d'une conjecture au problème posé : la procédure mise en place par le groupe permet d'émettre une (ou des) conjecture(s) au problème posé</p>	
Représenter	<p>Utilisation de changements de cadre : les élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> exploitent un schéma pour représenter la situation <input type="checkbox"/> ramènent le problème à un calcul intégral et à l'étude d'intersections/de positions relatives de deux objets <input type="checkbox"/> utilise une variable pour algébriser le problème (abscisse d'un point mobile sur la parabole, coefficient directeur de la droite passant par l'origine...) 	
Calculer	<p>Exercer l'intelligence du calcul : les élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> ramènent l'étude du problème à la résolution d'une équation et/ou inéquation (intersection de courbes) <input type="checkbox"/> ramènent l'étude du problème au calcul d'une intégrale 	
Communiquer	<p>Rédiger une démonstration : les élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> développent une argumentation mathématique complète et correctement rédigée <p>Faire preuve d'esprit critique : les élèves</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> confrontent la solution déterminée algébriquement à la conjecture émise grâce aux outils logiciels/à la calculatrice <input type="checkbox"/> remettent en doute leur conjecture 	

En pratique : feuille tableur

	A	B	C	D	E	F
		Travail de groupe : un partage équitable (Calcul intégral)	Barème			
				Gpe A	Gpe B	Gpe C
1			Note	10	6	0
2	»	Créer onglets Supp. onglets Rafraichir onglets Accès mèl				
3						
4		Compétence chercher	5	1,75	0	0
5	CHER	Appropriation du pb (localisation des invariants et variables)	1	●		
6	CHER	Exploitation raisonnée d'un outil logiciel ou de la calculatrice pour conjecturer	1	○		
7	CHER	Proposition d'une algébrisation du problème	1	○		
8	CHER	Emission de conjecture	1	○		
9	CHER	Proposition de pistes même si elles n'aboutissent pas	1	○		
10						
11		Compétence Représenter	3	2	0	0
12	REP	Schématiser la situation	1	○		
13	REP	Exploitation du calcul intégral	1	○		
14	REP	Utilisation d'une variable	1	●		
15						
16		Compétence Calculer	4	1	0	0
17	CALC	Résolution correcte d'une équation (détermination des coordonnées de l'intersection de deux courbes)	2	○		
18	CALC	Calcul d'intégral correctement mené	2	○		
19						
20		Compétence Reasonner/Communiquer	3	1,25	0	0
21	RAIS	Argumentation mathématiques complète et correcte/pistes envisagées correctes	1	○		
22	COM	Raisonnement correctement rédigé	1	●		
23	COM	Esprit critique : retour sur conjecture	1			



Compte-rendu du Groupe A



Calcul de l'aire du domaine \mathcal{D} :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \text{ u.a} \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \text{ u.a} \\
 &= \left(-\frac{2}{3} \times 2^3 + 2 \times 2^2 \right) - \left(-\frac{2}{3} \times 0^3 + 2 \times 0^2 \right) \text{ u.a} \\
 &= -\frac{2}{3} \times 8 + 2 \times 4 \text{ u.a} = -\frac{16}{3} + 8 \text{ u.a} \\
 &= \frac{8}{3} \text{ u.a}
 \end{aligned}$$

Les deux sous-domaines doivent avoir une aire égale à $\frac{4}{3}$ u.a

De plus, la droite passant par l'origine O et partageant \mathcal{D} en deux sous-domaines de même aire se traduit par l'équation suivante : $y = mx + p$.

Où $p=0$ (ordonnée à l'origine)

Donc, $y = mx$ où on cherche m .

La droite d'équation $x=1$ coupe le domaine \mathcal{D} en deux sous-domaines de même aire

Calcul de l'aire entre la droite $y = mx$, les droites $x=0$ et $x=2$ et (O_1) :

Informations concernant la démarche du Groupe A

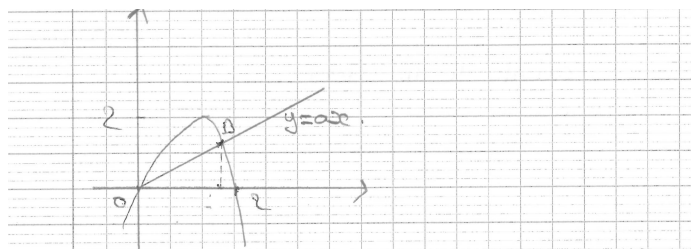
Le groupe s'est unanimement attelé dans un premier temps à déterminer l'aire du domaine \mathcal{D} après avoir représenté la parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x$. Ils ont alors conclu quant à l'aire des deux "sous-domaines".

Le groupe a bien remarqué que la "variable" du problème était la pente de la droite passant par l'origine et qu'en faisant varier cette pente, on fait varier l'aire des deux sous-domaines. Le problème revient ainsi à déterminer la bonne valeur de m , coefficient directeur de la droite.

Le groupe a envisagé de déterminer l'aire des deux sous-domaines mais n'a pas réussi à aboutir dans le temps imparti.



Compte-rendu du Groupe B



On cherche le point B qui est le point d'intersection entre la droite d'équation $y = ax$ et la courbe $f(x)$.

pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$-2x^2 + 4x = ax$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4 = a$$

$$\Leftrightarrow -2x = a - 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a - 4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{a}{2} + 2$$

Recherche à faire :

On veut trouver l'intégrale entre la droite

d'équation $x=0$ et $x = -\frac{a}{2} + 2$

et la droite d'équation $y = ax$ et la courbe $y = -2x^2 + 4x$

Soit

$$\int_0^{-\frac{a}{2} + 2} (f(x) - ax) dx \text{ u.a.}$$

Nous obtenons donc l'air du dessus de la droite en fonction du coefficient directeur de la droite.

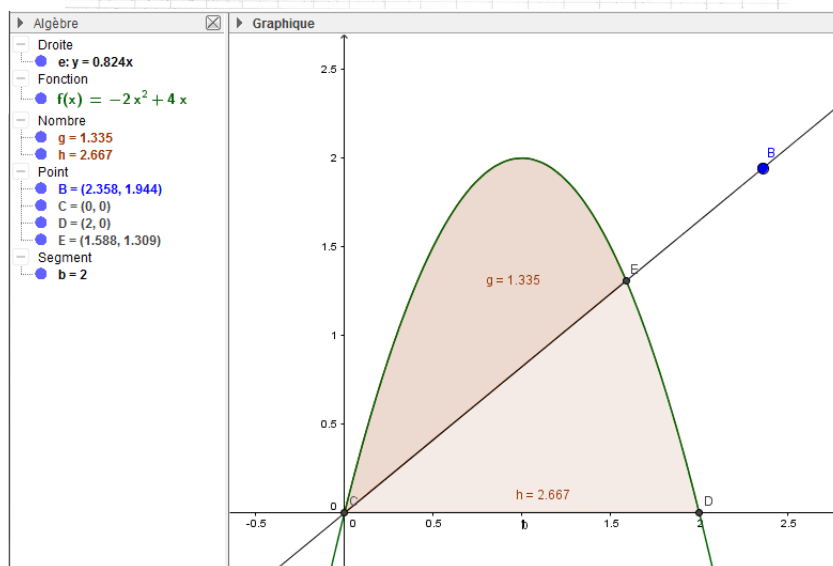
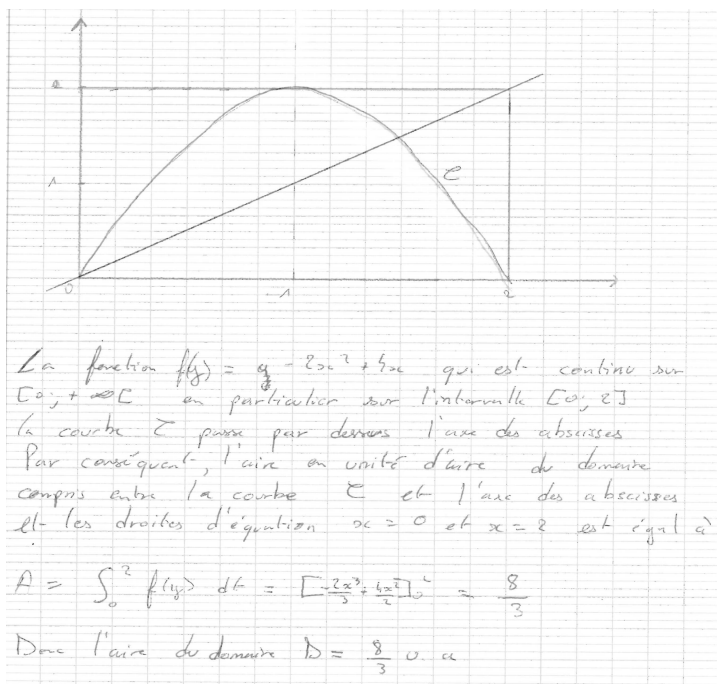
Informations concernant la démarche du Groupe B

Après avoir calculé les racines du trinôme $x \mapsto -2x^2 + 4x$ et tracé la courbe représentative de la parabole, les élèves ont ensuite déterminé l'aire du domaine \mathcal{D} (je n'ai pas fait apparaître ci-dessus cette partie du compte-rendu).

Les élèves ont ensuite modélisé le problème en introduisant l'équation réduite d'une droite passant par l'origine $y = ax$. Ils ont ensuite déterminé "le point B" (ou plutôt l'abscisse du point B), point d'intersection de la droite et de la parabole distinct de l'origine.

Étant pris par le temps, ils ont ensuite indiqué les pistes à envisager pour résoudre le problème.

Compte-rendu du Groupe C



Informations concernant la démarche du Groupe C

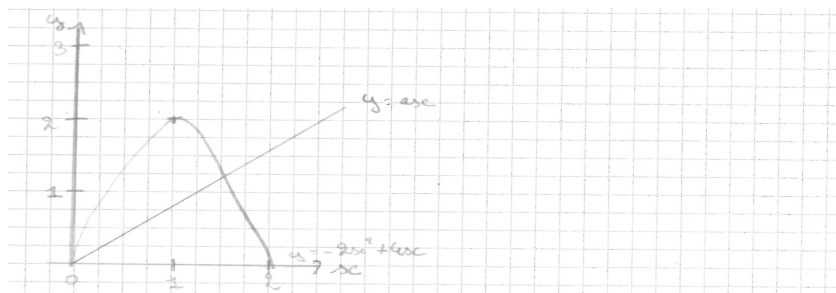
Le groupe a tout d'abord construit une figure en mettant en relief le rectangle (ou carré!) de côté 2. Vu que la diagonale d'un rectangle sépare un rectangle en deux triangles de même aire, les élèves ont alors conjecturé que cette même diagonale coupe le domaine en deux sous-domaine de même aire. Bien entendu, ils m'ont immédiatement demandé s'il s'agissait de la bonne solution. J'ai alors répondu que je l'ignorai et qu'il fallait m'en convaincre.

Deux élèves du groupe ont alors essayé de déterminer, dans la configuration décrite précédemment, l'aire des deux sous-domaine mais n'y parvenant pas, ils ont convaincu l'ensemble du groupe que l'utilisation du logiciel Geogebra leur permettrait de "vérifier" s'ils étaient sur la bonne piste. Un élève se connecte alors sur un des postes de la salle et commence sa construction sur ledit logiciel. Je l'ai aidé (via recherche internet) à trouver les fonctions permettant de déterminer l'aire d'un des sous-domaines. La conjecture émise n'était pas la bonne!

Un autre élève du groupe a alors indiqué qu'il serait judicieux de tracer une droite "mobile" passant par l'origine et un point mobile sur la parabole puis de faire apparaître l'aire des deux sous-domaine. Le groupe est alors arrivé à une conjecture mais n'ont pas pu la démontrer faute de temps.



Compte-rendu du Groupe D



On calcule D : l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x$.

$$\begin{aligned} D &= \int_0^2 -2x^2 + 4x \, dx \text{ u.a.} \\ &= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \text{ u.a.} \\ &= \left(-2 \times \frac{2^3}{3} + 4 \times \frac{2^2}{2} \right) - 0 \text{ u.a.} \\ &= -\frac{16}{3} + 8 \text{ u.a.} \\ &= \frac{8}{3} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

On cherche une droite linéaire. Quelque fois lorsqu'elle coupe D , elle sépare le domaine en deux parties égales donc on recherche une droite d'équation ax avec comme aire du domaine comprise entre la courbe de la parabole et la droite

soit égale à $\frac{D}{2}$ soit $\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$

On note $g(x)$ l'équation de la droite d'équation $y = ax$.

$$y - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + (4-a)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4-a}{2}$$

Donc on étudie le domaine compris entre les droites d'équation $x=0$ et $x = \frac{4-a}{2}$ et la droite d'équation $y = ax$ ainsi que la parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x$.

$$\int_0^{\frac{4-a}{2}} (y - g(x)) \, dx = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{4-a}{2}} (-2x^2 + 4x - ax) \, dx = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[-2 \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^{\frac{4-a}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{4-a}{2} \right)^2 - \frac{2 \times \left(\frac{4-a}{2} \right)^3}{3} - \frac{a \left(\frac{4-a}{2} \right)^2}{2} = \frac{4}{3}$$

Donc d'après un logiciel de calcul on trouve :

$$(a - 4) \times (a - 1) = -8$$

$$(a^2 + 8a + 16) (a - 1) = -8$$

$$a^3 + 8a^2 + 16a - a^2 - 8a - 16 + 8 = 0$$

$$a^3 - 7a^2 - 8a - 8 = 0$$

$$(a - 0,626793) (a + 2,48486) (a + 5,14134) = 0$$

Informations concernant la démarche du Groupe D

Les élèves ont vite cerné les variables du problème et se sont ensuite intéressés aux points d'intersection entre la droite d'équation $y = ax$ et la parabole.

Vu la complexité des derniers calculs à mener, j'ai encouragé un élève à exploiter les fonctionnalités de calcul formel de sa calculatrice.