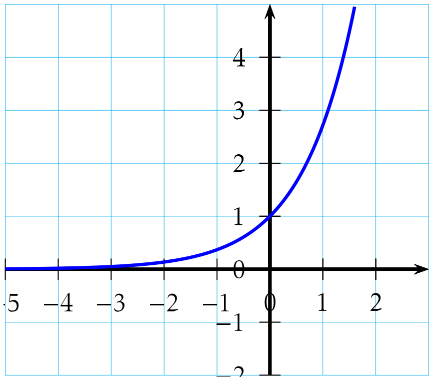
D'après les documents de l'APMEP www.apmep.fr

Bac S, Liban Mai 2015

Exercice 3 (3 points)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
   Démontrer que la droite $\mathcal{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

Le corrigé APMEP

1. Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 est donné par : $y = \mathrm{e}^1(x-1)+\mathrm{e}^1 \iff y = \mathrm{e}x$.
   la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$: $y = \mathrm{e}x$ est donc tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. On conjecture que :
   - Si $m < \mathrm{e}$ il n'y a aucun point d'intersection.
   - Si $m = \mathrm{e}$ il y a un point d'intersection.
   - Si $m > \mathrm{e}$ il y a deux points d'intersection.

3. **Première solution**
   Le point M de coordonnées $(x;y)$ est un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}_m$ si et seulement si $\mathrm{e}^x = mx \iff \mathrm{e}^x - mx = 0$.
   Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - mx$, alors $\mathrm{e}^x = mx \iff f(x) = 0$.
   Étudions cette fonction f, il vient :
   - $f'(x) = \mathrm{e}^x - m$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = +\infty$ car $m > 0$
   - $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   - $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > m \iff x > \ln(m)$
   - $f(\ln(m)) = m - m\ln(m) = m(1-\ln(m))$

   D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Il résulte de ce tableau de variations que
   - si $m(1-\ln(m)) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution ;

- si $m(1-\ln(m)) = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution ;
- si $m(1-\ln(m)) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

Or comme $m > 0$,
$m(1-\ln(m)) > 0 \iff 1-\ln(m) > 0 \iff 1 > \ln(m) \iff \mathrm{e} > m$,
d'où, en définitive

- si $m < \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ n'auront aucun point d'intersection ;
- si $m = \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ auront un seul point d'intersection ;
- si $m > \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_m$ auront deux points d'intersection.

Deuxième solution

On veut déterminer dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = mx$.
On sait que $m > 0$ et que, pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc les solutions de cette équation seront strictement positives.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^x = mx \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = m$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et :
$f'(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$
Le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $x-1$ donc négatif sur $]0\,;1[$ puis positif sur $]1\,;+\infty[$. La fonction f admet donc un minimum pour $x = 1$ égal à $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$.
D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \implies \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

On établit le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions $f(x) = m$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f et de la droite horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = m$.

D'après le tableau de variation de f :

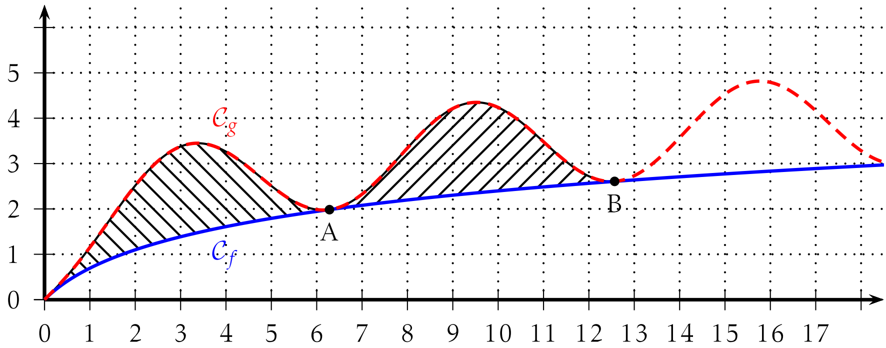
- si $m < \text{e}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont pas de point d'intersection donc la droite $\mathcal{D}_m$ et la courbe $\mathcal{C}$ n'ont pas de point d'intersection ;
- si $m = \text{e}$, la droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ ont un seul point d'intersection, et donc la droite $\mathcal{D}_m$ et la courbe $\mathcal{C}$ ont un seul point d'intersection ;
- si $m > \text{e}$, la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ ont deux points d'intersection, donc la droite $\mathcal{D}_m$ et la courbe $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection.

Bac S, Nouvelle-Calédonie Mars 2016

Exercice 2 (3 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par
$f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$.

Dans un repère du plan $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Le corrigé APMEP

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Pour tout x, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $1 - \cos(x) \geqslant 0$;

on en déduit que $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout x de $[0\,;16]$.

On cherche les abscisses des points A et B ; comme ce sont des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ces abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:

$f(x) = g(x) \iff \ln(x+1) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \iff \cos(x) = 1 \iff x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0\,;16]$ sont 0, 2π et 4π.

On en déduit que $x_{\text{A}} = 2\pi$ et $x_{\text{B}} = 4\pi$.

Comme sur $[0\,;16]$, $g(x) \geqslant f(x)$:

- l'aire de la surface 1 est donnée par

$$\mathcal{A}_1 = \int_{x_{\text{O}}}^{x_{\text{A}}} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

- l'aire de la surface 2 est donnée par

$$\mathcal{A}_2 = \int_{x_A}^{x_B} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{4\pi} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$ qui a pour primitive $x \longmapsto x - \sin(x)$. Donc :

- $\mathcal{A}_1 = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = [2\pi - \sin(2\pi)] - [0 - \sin(0)] = 2\pi$
- $\mathcal{A}_2 = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = [4\pi - \sin(4\pi)] - [2\pi - \sin(2\pi)] = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

Les deux surfaces hachurées sur le graphique ont donc la même aire égale à 2π.

Bac S, Nouvelle-Calédonie Novembre 2015

Exercice 2 (3 points)

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Le corrigé APMEP

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$
   - $f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
   - $f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à
   - $f_a(a + \ln 2) = \mathrm{e}^{a+\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.

x	$-\infty$	$a+\ln 2$	$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$	0	$+$
f_a	↘	$f_a(a+\ln 2)$	↗

2. En $a+\ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2-2a-2\ln 2+\mathrm{e}^a$.
   Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2-2a-2\ln 2+\mathrm{e}^a$.
   - $\varphi'(a) = -2+\mathrm{e}^a$;
   - $-2+\mathrm{e}^a > 0 \iff \mathrm{e}^a > 2 \iff a > \ln 2$;
   - $-2+\mathrm{e}^a < 0 \iff \mathrm{e}^a < 2 \iff a < \ln 2$;
   - $\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

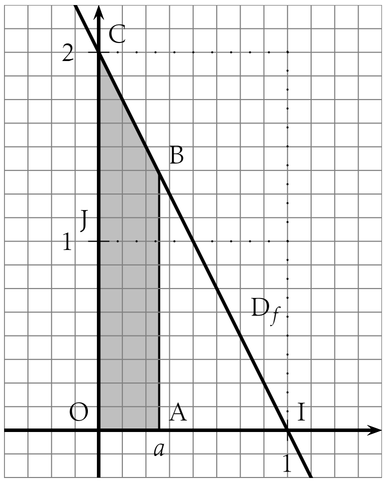
x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	↘	$4-4\ln 2$	↗

   Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à $\varphi(\ln 2) = 2-2\ln 2-2\ln 2+\mathrm{e}^{\ln 2} = 4-4\ln 2$.

Bac ES, Asie Juin 2015

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :
$f(x) = 2 - 2x$.
On a tracé ci-contre la droite D_f, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
Le point C a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\,;0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a\,;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



corrigé APMEP n°1 - n°2

Sur $[0\ 1]$, f est positive continue donc l'aire sous la courbe entre $x = 0$ et $x = a$ est $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit F une primitive de f : $F(x) = 2x - x^2$, donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(0) = 2a - a^2$.

L'aire de Δ est celle d'un triangle rectangle (ou bien on prend $a = 1$ dans la relation précédente) : $\mathscr{A}_\Delta = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.

On veut donc que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$, soit $2a - a^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $a^2 - 2a + \dfrac{1}{2} = 0$.

Le discriminant vaut : $(-2)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 4 - 2 = 2 > 0$ donc l'équation possède 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

$a_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \in [0\,;1]$ et $a_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$.

Donc, il existe une valeur de a pour laquelle le segment [AB] partage l'aire du triangle IOC en deux parties de même aire, c'est : $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$

corrigé APMEP n° 3

L'aire du triangle OIC rectangle en O vaut $\dfrac{\text{OI} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.

Il faut donc chercher la position du point A de coordonnées $(a\,;0)$ pour que l'aire du trapèze OABC soit égale à l'aire du triangle AIB.

Autrement dit, il faut que l'aire du triangle AIB soit la moitié de celle du triangle OIC, soit $\dfrac{1}{2}$.

L'aire du triangle OIB rectangle en A vaut $\mathcal{A} = \dfrac{\text{AI} \times \text{AB}}{2}$.

Le point B a pour abscisse a et pour ordonnée $f(a) = 2 - 2a$;

le point A a pour coordonnées $(a\,;0)$ donc $\text{AB} = 2 - 2a$.

Le point I a pour coordonnées $(1\,;0)$ donc $\text{AI} = 1 - a$.

$\mathcal{A} = \dfrac{(1-a)(2-2a)}{2}$ et on doit avoir $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}$.

On résout dans $[0\,;1]$ l'équation $\dfrac{(1-a)(2-2a)}{2} = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{(1-a)(2-2a)}{2} = \frac{1}{2} \iff 2 - 2a - 2a + 2a^2 = 1 \iff 2a^2 - 4a + 1 = 0$$

Cette équation a pour solutions $a' = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $a'' = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Mais $a' \notin [0\,;1]$ donc pour que les deux aires soient égales, il faut prendre $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$.