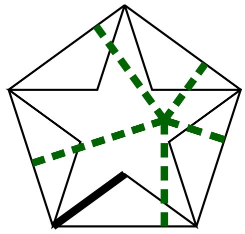
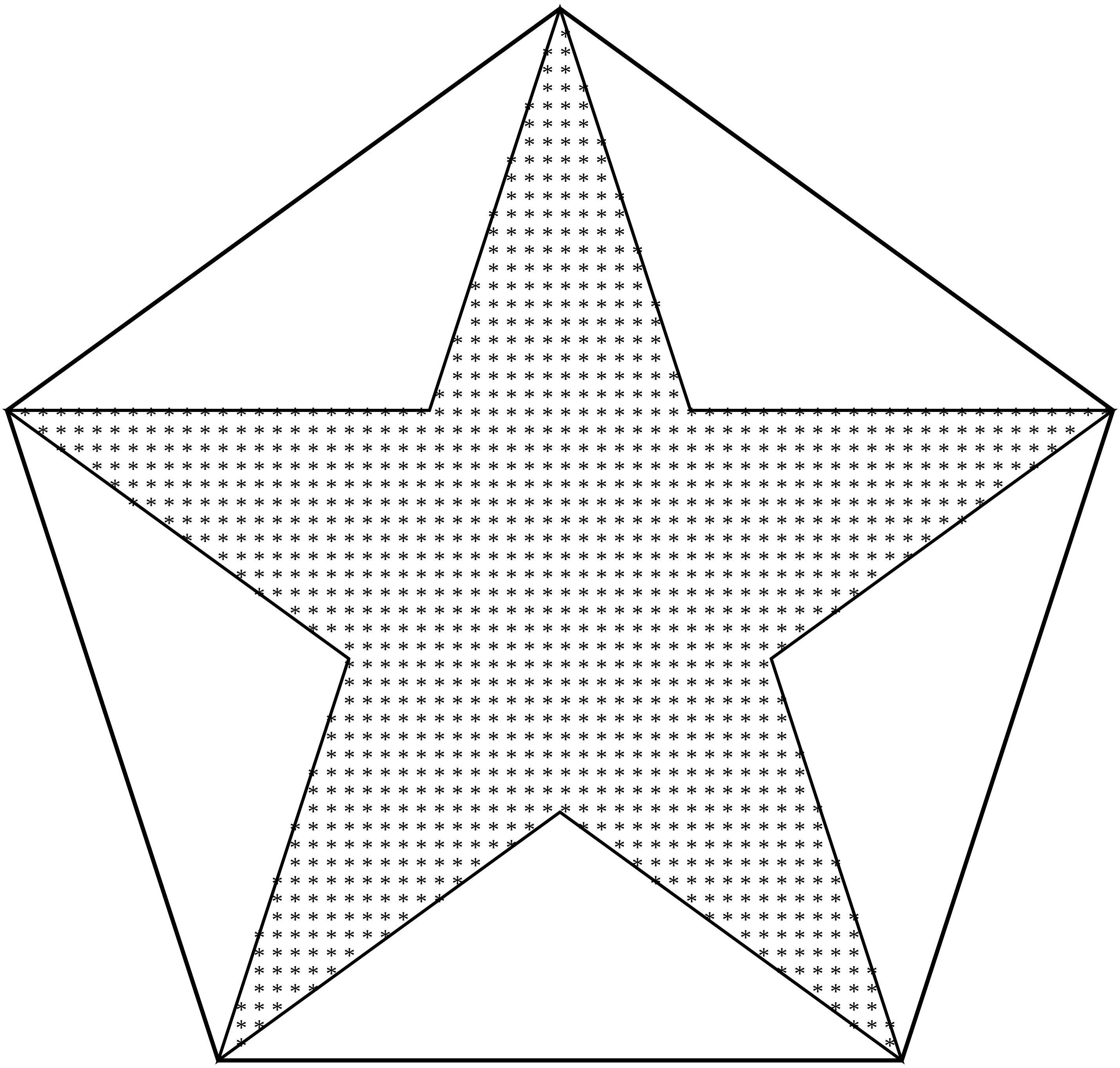
ÉTOILE DE NOËL

- Écris ta liste de cadeaux pour Noël au dos de cette feuille.
- La petite figure ci-contre illustre les consignes suivantes.
- Choisis l'une des 1 193 petites étoiles.
- Calcule la somme des cinq distances de cette étoile à chacun des côtés du pentagone (les segments en pointillés).
- Divise cette somme par la longueur d'un côté d'une branche de l'étoile (segment épais), puis divise ce quotient par le nombre magique : 5,678 910.
  Le nombre obtenu est la probabilité de recevoir ta liste de cadeaux à Noël !





1. Construction « simple »

- Construire le pentagone ABCDE, puis l'étoile ACEBD.
- Construire les points d'intersection des branches « complètes » permettant de définir le pentagone central FGHIJ.
- Construire l'étoile AFBGCHDIEJA.
- Définir le *curseur* `pas`, puis le maillage :

```
ptsQuadrillage =
        Séquence[
                Séquence[(xk, yk), yk, 0, y(D), pas],
                xk, x(E), x(C), pas
        ]
```

- Cacher les parties du maillage en dessinant dessus des polygones coloriés en blanc :

```
cache_1 = Polygone[A, G, B]
cache_2 = Polygone[B, (x(C), 0), C, H]
cache_3 = Polygone[C, I, D, (x(C), y(D))]
```

  ...

2. Construction compliquée

On utilise le théorème suivant :

> Soit un polygone $\mathcal{P}$, et un point A extérieur à $\mathcal{P}$.
> Le point M est à l'intérieur de $\mathcal{P}$ si et seulement le nombre d'intersections entre le segment [AM] et les côtés de $\mathcal{P}$ est impair.

- Construire le pentagone ABCDE, puis l'étoile ACEBD et placer un point Z à l'extérieur de l'étoile ACEBD.
- Construire les points d'intersection des branches « complètes » permettant de définir le pentagone central FGHIJ.
- Construire l'étoile AFBGCHDIEJA.
- Définir le *curseur* `pas`, puis *la liste* des points du maillage (et non la *liste de listes*) :

```
lPtsQuadrillage =
Aplatir[
        Séquence[
                Séquence[(kx, ky), ky, 0, y(D), pas],
                kx, x(E), x(C), pas
                ]
        ]
```

- L'entier `nbPts` est le nombre de points du maillage : `nbPts = Longueur[lPtsQuadrillage]`
- Pour chaque point M du maillage, on compte le nombre d'intersection entre l'étoile et le segment [MZ] et on stocke le résultat dans la liste `lNbPtsIntesection`.
  La commande `Nettoyer`permet d'obtenir une liste vide si l'intersection n'est pas définie ; donc de longueur nulle.

```
lNbPtsIntesection =
Séquence[
        Longueur[
                Nettoyer[
                        {Intersection[
                                Segment[Elément[lPtsQuadrillage, k], Z],
                                poly3
                        ]}
                ]
        ], k, 1, nbPts
]
```

- Pour chaque point M du maillage, si le nombre d'intersections avec l'étoile est impair on garde le point dans la liste `lPtsIntérieurs`

```
lPtsIntérieurs =
Nettoyer[
        Séquence[
                Si[
                        Reste[Elément[lNbIntersection, k], 2] == 1,
                        Elément[lPtsQuadrillage, k]
                ], k, 1, nbPts
        ]
]
```

- On masque le maillage, on affiche les points de la liste `lPtsIntérieurs`.

3. Téhorème de Viviani

> Dans un polygone régulier convexe, la somme des distances d'un point intérieur au polygone aux côtés du polygone est indépendante de la position du point.
> Cette somme est égale à n fois l'*apothème* (distance séparant le centre du polygone d'un côté) avec n nombre de côtés du polygone régulier.

Pour calculer l'apothème du pentagone : on cherche OK avec O centre du pentagone et $\mathrm{K} = m[\mathrm{AB}]$.

Dans le triangle OAK, $\mathrm{OK} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ et $mes\left(\widehat{\mathrm{AOK}}\right) = \frac{\pi}{5}$

$\tan\frac{\pi}{5} = \frac{\mathrm{AB}}{2\times\mathrm{OK}}$

$\mathrm{OK} = \frac{\mathrm{AB}}{2\tan\frac{\pi}{5}}$

À l'aide de Xcas : $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Comme la somme S vérifie $\mathrm{S} = 5\times\mathrm{OK} = \mathrm{AB}\times\frac{5}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

Mais comme je veux la somme en fonction du côté b d'une branche de l'étoile : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\mathrm{AB}}{2b}$

À l'aide de Xcas : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

donc $b = \frac{2}{1+\sqrt{5}}\times\mathrm{AB}$

on en déduit : $\frac{\mathrm{S}}{b} = \frac{5\left(1+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \approx 5{,}567\,582$

Mais en prenant en compte les imprécisions sur les mesures, on peut choisir un autre nombre magique pour avoir *de forte chances* d'obtenir un quotient inférieur à 1.

proposition : 5,678 910