



1. Olympiades 2016

Le sujet 2016 des Olympiades de mathématiques proposait de partager l'ensemble des entiers $\{0; 1; 2; \dots; n\}$ (avec n impair) en deux ensembles A et B de même effectifs, tels que

- $0 \in A$
- la somme des éléments de A est égale à la somme des éléments de B
- si possible : la somme des éléments de A élevés à la puissance p est égale à la somme des éléments de B élevés à la puissance p

Après quelques tâtonnements, les élèves trouvent les ensembles suivants :

$$n = 3 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$n = 7 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

donc pour $n = 3$, on a $A = \{0, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$;

on remarque que $0 + 3 = 1 + 2$

donc pour $n = 7$, on a $A = \{0, 3, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, 4, 7\}$;

on remarque que $0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7$ et $0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$

et pas de solution pour $n = 5$.

Fort de cette découverte, l'énoncé fait remarquer que pour $n = 3$ on peut associer le nombre $N_3 = 1001$ qui représente la deuxième ligne du tableau ; pour $n = 7$, on peut associer le nombre $N_7 = 10010110$. On remarque ensuite un règle de passage de N_3 à N_7 : il suffit de remplacer chaque 1 par 10 et chaque 0 par 01.

► construire t_{15} et vérifier les propriétés des ensembles A et B associés !

2. Suite de Thue-Morse et L-system

Inspirés par les questions précédentes, on étudie la suite définie par $t_0 = 1$ et la relation de récurrence :

pour tout entier n , $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$

(suite de Prouhet-Thue-Morse).

Un *L-system* ou un *système de Lindenmayer* est un système de grammaire formelle, inventé en 1968 par le biologiste hongrois Aristid LINDENMAYER. Un L-system modélise le processus de développement et de prolifération de plantes ou de bactéries.

La page de Wikipédia en français pour comprendre l'idée : <https://fr.wikipedia.org/wiki/L-Système>, celle en anglais, plus complète : <https://en.wikipedia.org/wiki/L-system> et le livre *The Algorithm Beauty of Plants*, Przemyslaw PRUSINKIEWICZ et Aristid LINDENMAYER <http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf> (attention ≈ 16 Mio).

L'idée est d'associer la tortue LOGO à la chaîne de caractères associée à t_n , le terme de rang n de la suite définie précédemment. Ici les caractères utilisés sont 0 et de 1.

À chaque caractère on associe un mouvement de la tortue : 0 signifie « avancer de 1 unité » et 1 « tourner à gauche de 60° (sans avancer) ».



Après l'avoir compris, compléter l'algorithme, puis le taper.

```
1  #-*- coding: utf-8 -*-
2  # python3
3  #
4  # d'après Olympiades de Mathématiques
5  # Amérique - Antilles - Guyane 2016
6  # et Wikipédia en anglais : Thue-Morse sequence
7
8  import turtle as tl
9
10 # création de la chaîne
11 L="1001"
12 for i in range(6): # répéter 6 fois
13     tmp=""
14     for c in L: # pour chaque caractère <c> de la chaîne
15         ↪ <L>
16         if c=="0":
17             tmp=tmp+"01"
18         else:
19             tmp=tmp+"10"
20     L=tmp[:]
21
22 # préparation de la tortue
23 tl.penup()
24 tl.setposition(-300,-300)
25 tl.pendown()
26 tl.hideturtle()
27 # dessin fait par la tortue lors du parcours de la chaî
28     ↪ ne
29 for c in L: # pour chaque caractère <c> de la chaîne <L
30     ↪ >
31     if c=="0":
32         tl.forward(20)
33     else:
34         tl.left(60)
35
36 tl.mainloop()
```

pour finir (ou commencer une nouvelle aventure) et jouer avec les L-system : <http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems>