Les sujets sont en format .pdf et .tex sur le site de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) www.apmep.fr

| | | |
|---|---|---|
| 2013 | Antilles (juin) | Exercice 1 : manip réalisable |
| | Métropole (juin) | Exercice 2 : manip possible |
| 2014 | Polynésie (juin) | Exercice 4 : Dosage acide base contexte à adapter car chimie mais faisable |
| | Antilles (juin) | Exercice 3, partie B : croissance microbienne |
| | Métropole (septembre) | Exercice 3, partie A |
| | | Exercice 4 |
| 2015 | Métropole (juin) | Exercice 2, partie A |
| | Métropole (septembre) | Exercice 1 : croissance microbienne |
| 2017 | Polynésie (juin) | Exercice 3 |
| | Antilles (juin) | Exercice 4, parie C |

# 1. Les énoncés

## 1.1 Antilles, juin 2013, exercice 1

Suite à un gros orage, la plage municipale de la commune d'Aistéhel subit une pollution momentanée du fait du débordement de la station d'épuration.

La concentration en bactéries E. coli (Escherichia coli) est retenue comme indicateur de contamination d'origine fécale.

Rappel (simplifié) des normes de qualité des eaux de baignade :

| Qualité de l'eau | bonne | moyenne | mauvaise |
|---|---|---|---|
| Concentration en E. coli en ufc/100 mL(*) | 0 à 100 | 100 à 2 000 | supérieur à 2 000 |

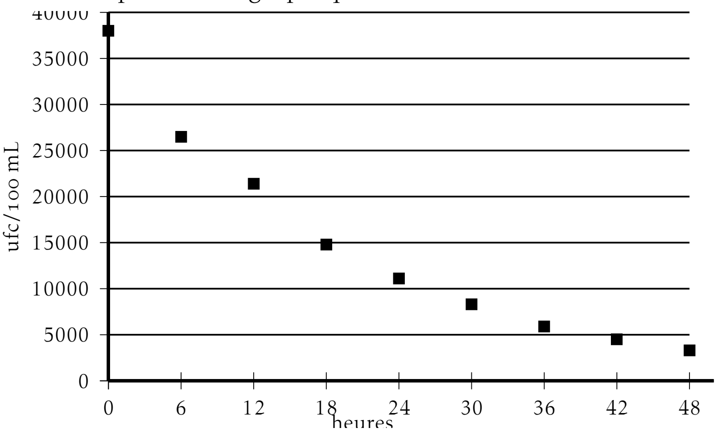
(*) *ufc : unités formant colonies*

Des analyses sont faites toutes les six heures afin de suivre l'évolution de la concentration en E. coli.

Les mesures des deux premiers jours sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

| Durée écoulée en heures ($t_i$) | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration en E. coli ($y_i$) (ufc/100 mL) | 38 000 | 26 500 | 21 400 | 14 800 | 11 100 | 8 300 | 5 900 | 4 500 | 3 300 |

Ces mesures sont représentées graphiquement ci-dessous.




**Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante**

**PARTIE A :**

1. Indiquer pourquoi un ajustement affine ne paraît pas approprié.

2. On propose de réaliser un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$ où $y_i$ désigne la $i$-ème mesure de la concentration en E. coli.
   a) Recopier sur votre feuille et compléter le tableau fourni en annexe 1 (arrondir les résultats à $10^{-3}$ près).
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de $z$ en $t$ selon la méthode des moindres carrés.
   On donnera la réponse sous la forme $z = at + b$, en arrondissant les coefficients $a$ et $b$ à $10^{-3}$ près.
   c) On considère désormais comme ajustement affine de $z$ en $t$ , la droite d'équation $z = -0{,}05t + 10{,}53$. En déduire un ajustement exponentiel de

la concentration en E. coli de la forme $y(t) = \mathrm{C}e^{kt}$ (C et $k$ étant deux constantes à déterminer à $10^{-2}$ près).

**d)** Pour cette question, on prendra $y(t) = 37\,400e^{-0,05t}$.

- En supposant que le modèle reste valide au-delà des deux premiers jours, quelle concentration est attendue trois jours après le début des mesures ? (la valeur sera arrondie à $10^{-2}$ près).
- Au bout de combien d'heures après le début des mesures la concentration correspondra-t-elle à une eau de baignade de bonne qualité ?

**PARTIE B :**

On appelle $(c_n)$ la concentration en E. coli au temps $n$ (où $n$ est le temps en heures).

Un technicien du laboratoire où sont réalisées les analyses propose de modéliser l'évolution de la concentration en E. coli par la suite géométrique $(c_n)$ pour laquelle :

- $c_0 = 38\,000$
- la raison est $q = 0,947$.

Comparer ce second modèle au modèle proposé à la question 2. d. de la partie A.

Argumenter votre réponse.

*Pour cette question, le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.* (Sommaire)

## 1.2 Métropole, juin 2013, exercice 2

On introduit un inoculum bactérien dans un bioréacteur contenant un milieu de culture. On mesure la population bactérienne toutes les heures à partir de la troisième heure. Le tableau suivant donne le résultat de ces mesures.

| Temps $t_i$ en heures | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $\mathrm{N}_i$ de bactéries | $1,09 \cdot 10^5$ | $2,68 \cdot 10^5$ | $7,31 \cdot 10^5$ | $2,2 \cdot 10^6$ | $6,93 \cdot 10^6$ | $1,79 \cdot 10^7$ | $5,12 \cdot 10^7$ |

**1.** Reproduire et compléter le tableau suivant, les valeurs étant arrondies à $10^{-2}$ près.

| Temps $t_i$ en heures | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = \ln(N_i)$ | 11,60 | | | | 15,75 | | |

2. Tracer dans le repère orthonormé donné en annexe, le nuage de points $M_i\,(t_i\ ;\ y_i)$ en prenant comme unité 1 cm sur chaque axe.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de $y$ en $t$ par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à $10^{-2}$ près.
   Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. On suppose que l'évolution du nombre de bactéries se poursuit suivant le même modèle jusqu'à ce que les éléments nutritifs commencent à manquer.
   a) Déterminer, à $10^6$ près, le nombre de bactéries dans le bioréacteur au bout de 11 heures.
   b) Les éléments nutritifs commencent à manquer dès que le nombre de bactéries atteint $3 \times 10^9$.
   À quel moment cela se produit-il ? Justifier votre réponse.

(Sommaire)

## 1.3 Polynésie, juin 2014, exercice 4

Le but de cet exercice est de comparer les résultats, obtenus par expérience et selon un modèle théorique, d'un titrage d'une solution d'hydroxyde de sodium (NaOH) par une solution d'acide chlorhydrique (HCl).

**Partie A : Expérience et approximation affine**

Lors d'une expérience, on obtient les mesures suivantes :

| Numéro de la mesure | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Volume en ml d'acide versé : $x_i$ | 0 | 10 | 20 | 40 | 50 | 60 |
| pH : $y_i$ | 11,80 | 11,68 | 11,52 | 11,32 | 11,22 | 11,08 |

1. Sur l'annexe page, représenter le nuage de points $M_i\ (x_i\ ;\ y_i)$.

2. a) À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à $10^{-4}$ près).
   b) En utilisant l'ajustement réalisé à la question précédente, déterminer le pH du mélange après versement de 35 ml d'acide chlorhydrique.

**Partie B : Modèle théorique**

Pour un volume $x$ (en ml) d'acide chlorhydrique ajouté, compris entre 0 et 150, le pH de la solution est égal à $f(x)$ où $f$ est la fonction définie sur $[0\,;150]$ par :

$$f(x) = 3{,}8 - 0{,}01x + \frac{8}{1+\mathrm{e}^{0{,}2x-16}}$$

La fonction $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$ sur $[0\,;150]$.

1. a) Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;150]$ : $f'(x) = -0{,}01 - \dfrac{1{,}6\,\mathrm{e}^{0{,}2x-16}}{\left(1+\mathrm{e}^{0{,}2x-16}\right)^2}$
   b) Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur $[0\,;150]$.

2. Représenter la courbe représentative de $f$ sur le graphique de la partie A, annexe.

**Partie C : Comparaison**

1. Pour 60 ml d'acide versé, comparer la valeur du pH obtenue par l'ajustement affine réalisé dans la partie A et celle obtenue par le modèle théorique de la partie B.

2. Le modèle théorique étant validé, l'ajustement affine réalisé dans la partie A pour $x$ appartenant à $[0\,;60]$ semble-t-il pertinent sur $[0\,;150]$ ? Argumenter la réponse.

(Sommaire)

## 1.4 Antilles, juin 2014, exercice 3.B

***Dans cet exercice, les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.***

Production de l'antibiotique spiramycine.

L'espèce *Streptomyces ambofaciens* a été sélectionnée pour sa production de spiramycine. Cet antibiotique est obtenu par la fermentation de la *Streptomyces ambofaciens* en bioréacteur.

Afin de prévoir au mieux la production de cet antibiotique, on cherche le développement de la *Streptomyces ambofaciens* dans le bioréacteur.

Après 24 h le milieu est renouvelé au sein du bioréacteur, à partir de ce moment on obtient le relevé suivant :

| Heures | 24 | 29 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'heure : $x_i$ | 0 | 5 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| Concentration de *Streptomyces ambofaciens* : $y_i$ | 7,95 | 11,05 | 12,05 | 13,45 | 14,15 | 15,45 | 16,75 |

**1.** Dans un repère orthogonal, construire un nuage de points $\mathrm{M}(x_i\ ;\ y_i)$. En abscisse, pour le rang de l'heure, on prendra comme échelle $np[cm]1$ pour 2 heures et en ordonnée 1 cm pour 2 g/l ; on positionnera l'intersection des axes de coordonnées au point de coordonnées $(0\,;7)$.

**2.** Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. *On arrondira les coordonnées au dixième.*
Placer G dans le repère.

**3.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients seront arrondis à* $10^{-2}$ *près*.

**4.** On décide d'ajuster le nuage avec la droite (D) d'équation $y = 0{,}53x + 8{,}03$.

  **a)** Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

  **b)** En utilisant cet ajustement affine, estimer par une méthode graphique la concentration de *Streptomyces ambofaciens* au bout de 48 h (la réponse sera accompagnée de tracés sur le graphique).

  **c)** À partir de quelle heure la concentration de *Streptomyces ambofaciens* dépassera-t-elle 30 g/l ?

(Sommaire)

## 1.5 Métropole, septembre 2014, exercices 3.A et 4

**Exercice 3** Les deux parties de l'exercice proposent une approche différente de l'étude cinétique d'une réaction catalysée par la β-fructosidase.

La vitesse initiale $v$ de la réaction a été mesurée en présence de différentes concentrations, notées $s$, de substrats dans des conditions identiques de pH et de température. Les résultats sont les suivants :

| Concentration de substrat $s_i$ en mmol.L$^{-1}$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 1 | 1,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Vitesse initiale $v_i$ en µmol par minute | 4,5 | 5,6 | 6,3 | 6,9 | 7,7 | 8,1 |

**Partie A : Utilisation d'un changement de variable**

1. On effectue les changements de variable : $x_i = \dfrac{1}{s_i}$ et $y_i = \dfrac{1}{v_i}$.

| $x_i$ | 10 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,22 | | | | | |

   a) Recopier et compléter le tableau ci-dessus (valeurs arrondies à $10^{-2}$ près).

   b) Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,,\,y_i)$ sur une feuille de papier millimétré.
   On choisira 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 0,02 en ordonnée.

2. a) Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement D sous la forme $y = ax + b$ ($a$ est arrondi à $10^{-4}$ près et $b$ est arrondi à $10^{-2}$ près).

   b) Tracer la droite D sur le graphique précédent.

3. On admet que la β-fructosidase suit le modèle de Michaelis-Menten et on peut alors écrire :

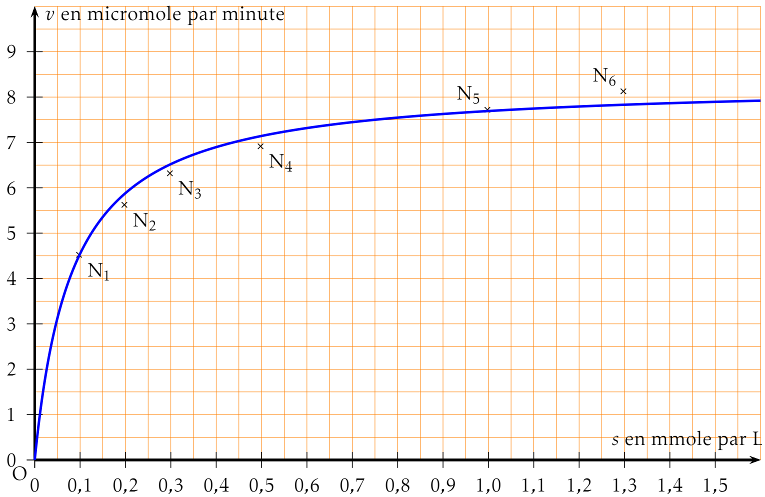
$$\frac{1}{v} = \frac{K_M}{v_{\text{max}}} \times \frac{1}{s} + \frac{1}{v_{\text{max}}}$$

   où $v_{v_{\text{max}}}$ est la vitesse initiale maximale et $K_M$ est la constante de Michaelis spécifique de la β-fructosidase.
   On admet que $a = \dfrac{K_M}{v_{\text{max}}}$ et $b = \dfrac{1}{v_{\text{max}}}$ où $a$ et $b$ sont les valeurs obtenues à la question **2.a**.
   En déduire $v_{\text{max}}$ à $10^{-2}$ près, puis KM à $10^{-4}$ près.

Points $N_i\,(s_i,\ n_i)$ et représentation graphique de la fonction $f$ définie par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0{,}01 + 0{,}12s}$$

où $v$ est en µmol par minute et $s$ en mmol par litre.




(Sommaire)

**Exercice 4**

**Partie A**

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,2y = 100$$

où $y$ est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Démontrer que la solution $y$ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction $y$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $y(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right)$.

**Partie B**

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right).$$

On désigne par $C_1$, la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que représente la droite D d'équation $y = 500$ pour la courbe $C_1$ ?
2. a) Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   b) En déduire le sens de variation de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

**Partie C : exploitation des résultats de la partie B**

Lors de l'étude de la progression d'une épidémie sur une population de 2 000 personnes, on a établi que le nombre d'individus contaminés à la date $t$, exprimée en jours, est donné par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right)$$

pour $t$ entre 0 et 30.

1. Combien de personnes sont contaminées après un jour d'épidémie ? Après dix jours ? Les résultats seront arrondis à l'unité près.
2. De quel pourcentage a augmenté le nombre de personnes contaminées entre le premier et le dixième jour de l'épidémie ? On donnera la réponse en %, arrondie au centième près.
3. Le tiers de la population peut-il être contaminé ?
4. Au bout de combien de jours, le huitième de la population est-il contaminé ?

(Sommaire)

## 1.6 Polynésie, juin 2017, exercice 3

On étudie le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On modélise cette situation par une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ qui à chaque instant $t$ (exprimé en heures) associe le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte à cet instant.

On admet que pour tout réel $t$ de $[0\,;+\infty[$,

$$f(t) = 1\,200 - 1\,000\mathrm{e}^{-0,04t}.$$

Dans le repère orthogonal donné en annexe, on a tracé la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction $f$.

**1.** La courbe $(\mathcal{C})$ donnée en annexe suggère l'existence d'une asymptote horizontale.
Donner une équation de cette asymptote et justifier ce résultat par un calcul de limite.
*On pourra utiliser le résultat suivant :* $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$.

**2.** **a)** En utilisant le graphique de l'annexe, déterminer le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte au bout de 40 heures. On fera apparaître les traits de construction utiles.

**b)** Déterminer, par le calcul, au bout de combien d'heures le nombre d'individus, en milliers, initialement présents dans l'enceinte aura été multiplié par 5.

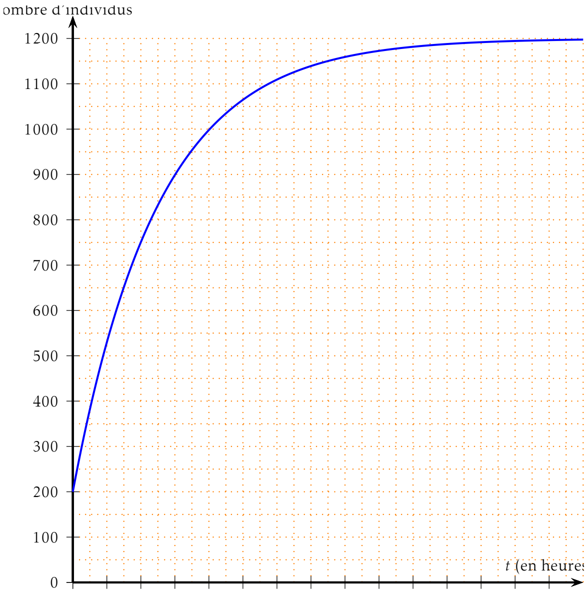
**3.** On appelle vitesse d'évolution du nombre d'individus à l'instant $t$, exprimée en nombre d'individus en milliers par heure, le nombre $f'(t)$.

**a)** Pour tout réel $t$ positif ou nul, calculer $f'(t)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.

**b)** Déterminer une valeur arrondie à $10^{-1}$ de la vitesse d'évolution du nombre d'individus, en milliers par heure, à l'instant $t = 50$ heures.

**c)** On appelle (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 50.
Tracer cette tangente sur le graphique donné en annexe à rendre avec la copie. On expliquera la méthode employée.

**d)** La vitesse d'évolution du nombre d'individus, en milliers par heure, diminue au cours du temps.
Comment cela se traduit-il sur le graphique de l'annexe ?

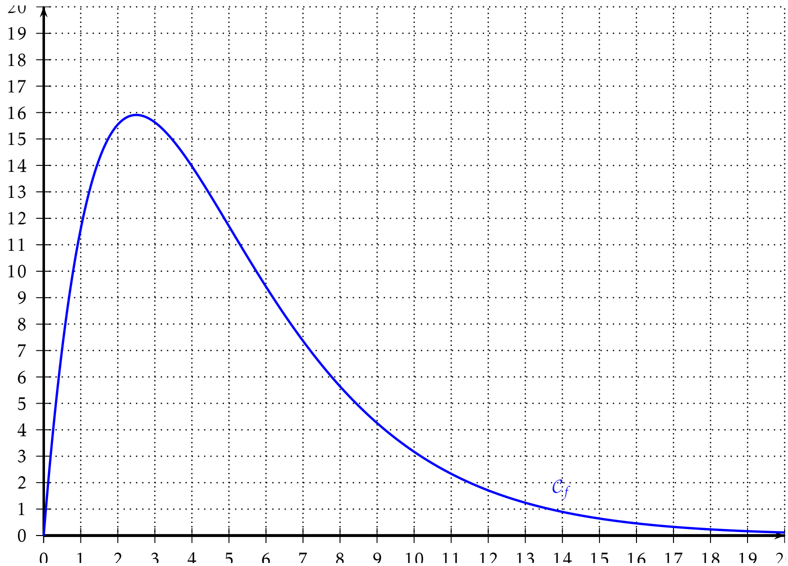



(Sommaire)

## 1.7 Antilles, juin 2017, Exercice 4.C

### PARTIE C - INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS DE LA PARTIE B

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction $f$ représentée dans le repère ci-dessous. ($f$ est la fonction définie dans la partie B)



On suppose que $f(t)$ représente le taux d'IgG en $g.L^{-1}$ en fonction du temps $t$ en semaines (écoulées après contact avec l'antigène), où la fonction $f$ est celle de la partie B.

1. Quel est le taux maximal d'IgG du patient ? Quand ce taux est-il atteint ?
2. Le test sérologique d'IgG est positif lorsque le taux d'IgG dépasse $13 g.L^{-1}$. Déterminer, à l'aide du graphique, sur quelle période une analyse de sang donnerait ce test positif.
3. Sachant que le taux d'immunoglobuline est inférieur à $12 g.L^{-1}$ en moyenne chez un adulte sain, suivant ce modèle, durant quelles périodes le sujet pourrait-il être diagnostiqué sain ?

(Sommaire)