Pythagore, l'homme qui voyait des nombres partout.

Les irrationnels

Le théorème du Perroquet, Denis Guedj (Ed. Point, p. 131)

[...] Comme pour Thalès, on ne dispose d'aucune œuvre écrite de Pythagore, pas plus qu'on ne connaît les dates exactes de sa naissance et de sa mort. On sait seulement qu'il a vécu au V[ieme] siècle avant notre ère, qu'il est né dans l'île de Samos, au milieu de la mer Égée et qu'il est mort à Crotone dans l'extrême sud de l'Italie.

Pythagore avait dix-huit ans lorsqu'il participa aux Jeux Olympiques. Il remporta toutes les compétitions de pugilat. Après sa victoire, il décida de voyager. En Ionie toute proche, il passa quelques années auprès de Thalès et d'Animaxandre, son élève. Puis, en Syrie, il séjourna auprès des Sages phéniciens qui l'initièrent au mystère de Byblos. Puis au mont Carmel, dans le Liban d'aujourd'hui. De là il s'embarqua pour l'Égypte, y resta vingt années. Dans les temples des rives du Nil, il eut tout le loisirs d'acquérir le savoir des prêtres égyptiens.

Et voilà que les Perses envahirent le pays, et voilà qu'il se retrouve prisonnier et qu'on l'emmène à Babylone. Il n'y perd pas son temps. Durant les douze années passées dans la capitale mésopotamienne, il acquiert l'immense savoir des scribes et celui des mages babyloniens, et, pleins d'usages et de raison il retourna vers Samos qu'il avait quittée quarante ans plus tôt. Mais à Samos régnait Polycrate, le tyran, et Pythagore haïssait les tyrans. Alors il reparti [...] Pythagore alla se fixer dans la cité [...] de Crotone. Où il fonda son « École ».

De Pythagore, qui fut élève de Thalès pendant quelques années, jusqu'à Achytas de Tarente, lui même fidèle ami de Platon, l'école Pythagoricienne dura près de 150 années et compta 218 Pythagoriciens. [...] Tous ne furent pas mathématiciens.

[...] Hippase fut l'un des premiers pythagoriciens ; il était chef des *acousmaticiens*, les candidats à l'initiation, tandis que Pythagore dirigeait les *mathématiciens*, les initiés.

De l'impuissance à l'assurance

Le théorème du Perroquet, Denis Guedj (Ed. Point, p. 162)

Nous sommes au V[ieme] siècle avant notre ère, quelque part en Grande Grèce, probablement sur les rivages d'Italie du sud, près de Crotone. Drame en trois actes.[...]

Premier acte. Tout est nombre.

Quels étaient-ils les nombres chargés de dire le monde et l'harmonie, ces nombres chargés de dire le cosmos ? Les nombres entiers. Et les fractions, aussi, qui ne sont que des rapports d'entiers. Les positifs uniquement. Pour la bonne raison qu'il n'y avait pas de nombres négatifs dans les civilisations de l'Antiquité.

[… L]es Grecs ont utilisé les rapports de deux entiers quelconques. […] La fonction principale de ces nombres, nommées plus tard rationnels, était d'exprimer numériquement les grandeurs géométriques, c'est à dire de les mesurer. […]

Deuxième acte. L'arrivée de la diagonale du carré de côté 1.

[…] Sur une feuille de papier, M. Ruche dessina un carré et l'une de ses diagonales. […] Il annonça :

Côté et diagonale, les deux segments remarquables d'un carré !
Quel rapport y a-t-il entre eux ? Prenons le carré le plus simple, celui de côté 1. Quelle est la longueur de la diagonale ? Coupons le en deux, on obtient deux triangles isocèles égaux. L'hypoténuse commune des triangles est la diagonale du carré.

Qu'affirme le théorème de Pythagore ? […]
Carré de la diagonale $= 1^2 + 1^2 = 2$.

Voilà l'information capitale : la longueur de la diagonale est un nombre dont le carré est 2 ! […]

Quel est ce nombre ? C'est peu dire que les Grecs le cherchèrent. Aucun nombre ne convenait ! Aucun entier, aucune fraction ! La question surgit alors : ce nombre existe-t-il ? Et s'il n'existe pas, comment s'en assurer ? Pour s'assurer qu'une chose existe, il suffit de l'exhiber. Mais quand elle n'existe pas, hein ? Difficile d'exhiber la non-existence ! Alors ? La seule façon d'affirmer qu'une chose n'existe pas, c'est de prouver qu'elle NE PEUT PAS EXISTER. […]

C'est ce qu'on fait les Pythagoriciens. Ils ont démontré qu'un nombre rationnel dont le carré est 2 ne peut pas exister. Si un nombre représente le côté d'un carré, aucun nombre ne pourra représenter sa diagonale. La diagonale et le côté sont INCOMMENSURABLES ![…]

Regardez la figure. VOIT-ON que la diagonale et le côté sont incommensurables ? Non ! On ne décèle aucun indice qui nous mette la puce à l'oreille. Rien de cette impossibilité ne transpire. L'incommensurabilité n'est pas visible ! La figure est muette, seul le travail de la pensée peut la révéler.

Troisième acte. Comment réagit la société grecque à ces révélations ?

[…] Le lien capital entre nombres et grandeurs, qui établit la cohérence de l'univers des pythagoriciens, fut brutalement rompu. Et il le fut au cœur même d'une des figures phare du monde antique : le carré. Comble, le coup avait été porté par l'application de deux des plus célèbres créations des pythagoriciens, le théorème de Pythagore lui-même […] et la séparation des entiers en pairs et impairs. […]

Voilà le scandale logique qu'Hippase de Métaponte a divulgué à l'extérieur du cercle des Pythagoriciens. Pour l'avoir fait, il a péri dans un naufrage.

YBC 7289 et les programmes de la rentrée 2018

En 2nde

- **Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$**
  Pour rester dans l'idée Pythagoricienne des pairs et des impairs.
  On cherche deux entiers p et q premiers entre eux tels que :

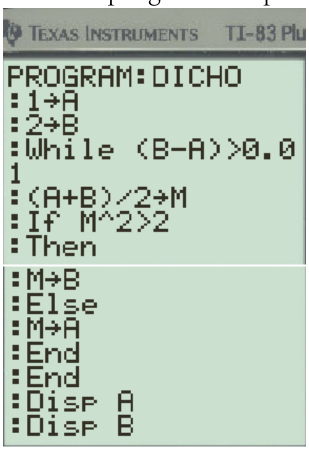
$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

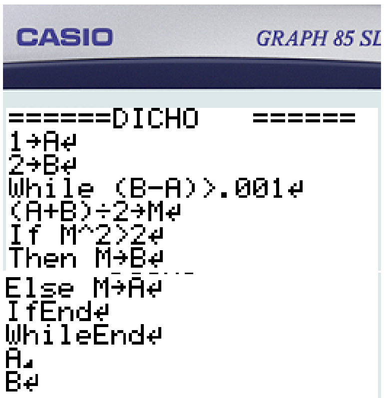
  Pour que deux nombres soient égaux, il est nécessaire qu'ils aient le même chiffre des unités :

unités de p et q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
unités de p^2										
unités de $(2q^2)$										

  Pour continuer : appliquer le même raisonnement pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$

- **Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}**
  Voici les programmes pour calculatrices :



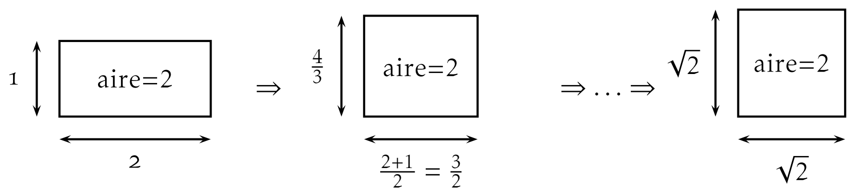


  - les réécrire en Python (l'utilisateur doit pouvoir entrer la valeur de n)
  - adapter le programme précédent : l'utilisateur doit pouvoir, en plus de la précision, entrer la valeur de l'entier dont il veut obtenir une approximation de la racine carrée.

- input() et conversion de type
- boucle while

En 1re : la méthode de Héron

On part d'un rectangle de côtés 1 et 2 et d'aire 2.
On construit les rectangles suivants, qui ont tous la même aire, de façon à obtenir au final un carré.



1. Calculer les côtés des 2 rectangles suivants.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer les côtés du rectangle à l'étape $(n+1)$ à partir de celles du rectangle de l'étape n et qui s'arrête lorsque la

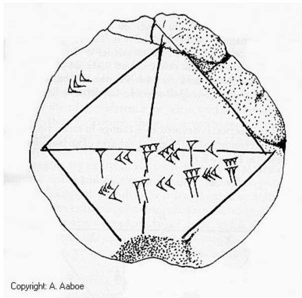
formatage de l'affichage : https://pyformat.info différence entre les deux côtés du rectangle est inférieure à une précision donnée.

3. Continuer les calculs à l'aide de Python.
   Pour continuer :
   - adapter l'algorithme de Héron pour calculer la racine carré d'un entier choisi par l'utilisateur.
   - comparer le nombre d'étapes entre les deux algorithmes pour une précision donnée.

YBC 7289 et la méthode de Théon de Smyrne

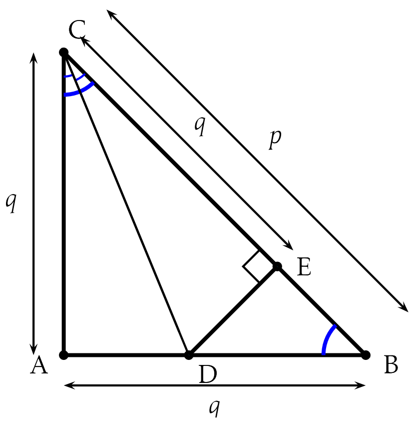
d'après une idée de « Python, les bases de l'algorithmique et de la programmation », Vincent Maille

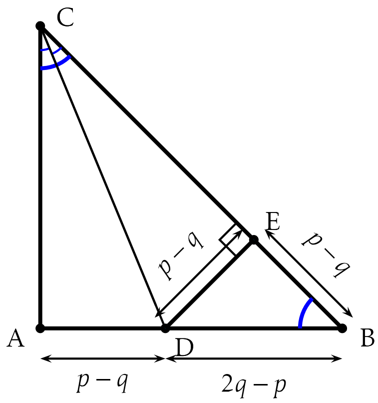
photos : http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/algebre/tablette-ybc-7289



- les triangles semblables sont au cycle 4
- les bissectrices ne sont dans aucun programme !

S'il existe deux entiers p et q tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2}$, on peut construire la figure de gauche, qui implique (à prouver) celle de droite :





(CD) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$

Donc $\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$

en posant $u = 2q - p$ et $v = p - q$, on trouve la relation : $\frac{u}{v} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2v+u}{u+v} = \sqrt{2}$

On démontre que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = \quad u_n + v_n \end{cases}$ sont telles que $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\sqrt{2}$.

- Écrire un algorithme calculant $\frac{u_{20}}{v_{20}}$
- On peut généraliser ces suites pour approcher la racine carrée de tout entier $a \geqslant 2$:

  $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + av_n \\ v_{n+1} = \quad u_n + v_n \end{cases}$

  sont telles que $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\sqrt{a}$.

  Écrire une fonction donnant une approximation de $\sqrt{a}$.
- Écrire un algorithme qui convertisse un entier écrit en base sexagésimale (les différentes parties du nombre seront simplement séparées par des espaces) en base 10.

affectation en parallèle

écrire une fonction à importer dans la console

- utilisation des listes
- fonction enumerate
- fonction split

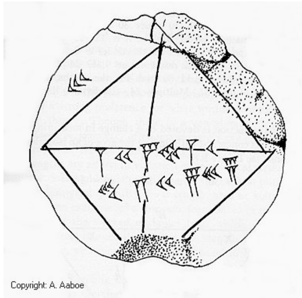
Attention : sur la tablette, pour la diagonale, il faudra s'interroger… et écrire un autre algorithme !

Les nombres qu'on peut lire :

côté 3 chevrons = 30

sur la diagonale 1␣24␣51␣10

sous la diagonale 42␣25␣35



Une traduction de YBC 7289

YBC : Yale Babylonian Collection.

photos : *it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.html*

Rappels Babyloniens pseudo base 60 ; pas zéro, c'est le contexte qui donne la lecture des nombres.

On remarque alors que 1␣24␣51␣10 $= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30\,547}{21\,600} \approx \sqrt{2}$

42␣25␣35 $= 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = \frac{30\,547}{43\,200} \approx 30\sqrt{2}$

mêmes numérateurs, dénominateur de l'un est le double de l'autre : le choix de 30 pour le côté ne doit pas être dû au hasard !

```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3

u, v = 1, 1
for _ in range(20):
    u , v = u + 2*v, u + v

print("une approximation de racine carrée de 2 est ", u, "/", v, " = ", u/v)
```

```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3

# dans la console, dans le dossier où est lancé python :
# >>> import <nomfic> as <nom_alias>
# >>> <nom_alias>.racine(<n>)

def racine(a):
    u, v = 1, 1
    for n in range(20):
        u , v = u + a*v, u + v
    return u, v

a = 34
x, y = racine(a)
print("une approximation de racine carrée de ", a, " est ", x,
        "/", y, " = ", x/y)
```

```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3

n_dix = 0
n_sexa = input("nombre sexagesimal (séparateur espace) ")
n_liste = n_sexa.split()[::-1]
for i, n in enumerate(n_liste):
    n_dix = n_dix + int(n) * 60**i
print(n_sexa, " (base 60) = ", n_dix, " en base 10")
```

```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3
#
# converti un décimal de la base sexagesimal vers la base 10

def convert_ent(s):
    """ la partie entière sous forme de chaîne est convertie
    en base 10
    """
```

```python
    s = s.split()[::-1] # on sépare les groupes de nombres, puis
                    # on retourne pour commencer par les unités
    ent = 0
    for i, n in enumerate(s):
        ent = ent + int(n) * 60**i
    return ent

def convert_dec(s):
    """ la partie décimale sous forme de chaîne est convertie
    en base 10
    """
    s = s.split() #on sépare les groupes de nombres
    dec = 0
    for i, n in enumerate(s):
        dec = dec + int(n) / 60**(i + 1)
    return dec

n_sexa = input("nombre sexagesimal (séparateur espace entre les groupes,\
    \n point entre partie entière et partie décimale) ")
l_sexa = list(n_sexa.split(".")) # le nb est écrit sous forme d'une liste
    # à deux éléments : la partie entière et la partie décimale
n = convert_ent(l_sexa[0])
if len(l_sexa) == 2: #il y a une partie décimale
    n = n + convert_dec(l_sexa[1])
print(n_sexa, " (base 60) = ",n," en base 10")
```