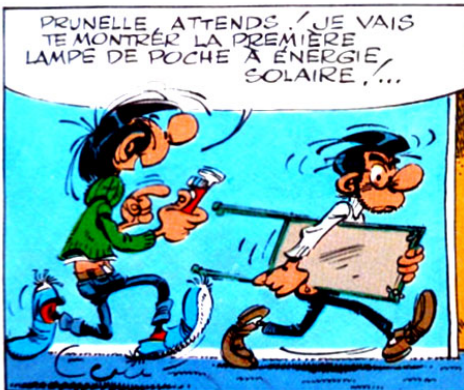




On dispose de 1 000 lampes numérotées de 1 à 1 000.

- à l'étape 0, toutes les lampes sont éteintes ;
- à l'étape 1, on allume toutes les lampes ;
- à l'étape 2, on change l'état des lampes dont le n° est divisible par 2 ;
- à l'étape 3, on change l'état des lampes dont le n° est divisible par 3 ;
- ...
- à l'étape n , on change l'état des lampes dont le n° est divisible par n .

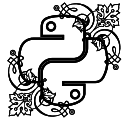
Au bout des 1 000 étapes, quels sont les n° des lampes allumées ?
Émettre une conjecture, puis la démontrer !





La notion de diviseur est compliquée en 2^{nde} on peut compter de n en n .

```
1 # -*- coding:utf8 -*-
2 # python 3
3
4 """ On dispose de 1000 lampes numérotées de 1 à 1000.
5 - à l'étape 0, toutes les lampes sont éteintes ;
6 - à l'étape 1, on allume toutes les lampes ;
7 - à l'étape 2, on change l'état des lampes dont le  $n^0$  est
   ↔ divisible par 2 ;
8 - à l'étape 3, on change l'état des lampes dont le  $n^0$  est
   ↔ divisible par 3 ;
9 ...
10 - à l'étape  $n$ , on change l'état des lampes dont le  $n^0$  est
    ↔ divisible par  $n$ .
11 Au bout des 1000 étapes, quels sont les  $n^0$  des lampes allumés
    ↔ es ?
12 Emettre une conjecture, puis la démontrer !
13 """
14
15 # 0 = lampe éteinte / 1 = lampe allumée
16 # à la première étape toutes les lampes sont allumées
17 lampes = [1 for k in range(1000)]
18 for n in range(2,1001): # range = [2;1001[
19     k = n - 1 # première lampe à changer
20     while k < 1000:
21         lampes[k] = 1 - lampes[k] # changement d'état
22         k = k + n # on compte de n en n
23 # enumerate renvoie l'indice et la valeur
24 allume = [i+1 for i, etat in enumerate(lampes) if etat == 1]
25 print("les  $n^0$  des lampes allumées sont :",allume)
```



Conjecture : les lampes allumées sont celles dont le n° est un carré.

Démonstration : soit n le numéro de la lampe.

- Le nombre de changement d'état est le nombre de diviseurs de n .
- Si la lampe est allumée, alors la lampe a changé d'état un nombre impair de fois.

Seuls les carrés parfaits ont un nombre impair de diviseurs.

4 a pour diviseurs 4 2
1

36 a pour diviseurs 36 18 12 9 6
1 2 3 4

15 a pour diviseurs 15 5
1 3