Je les ai vues !

SPAGHETTI

Stéphanie coupe au hasard un spaghetti en trois morceaux :
quelle est la probabilité qu'elle puisse construire un triangle avec les morceaux obtenus ?
pour la version Terminale : Déclic, maths complémentaires (p. 145) https://mesmanuels.fr/acces-libre/9782016290125

Modélisations possibles

Pour chacune :

- Associer un point du plan à chaque couple $(x;y)$.
- Écrire un programme informatique (ou utiliser un tableur) afin d'émettre des conjectures
- Modéliser les conjectures pour démontrer.

Troisième - Seconde

On pourra représenter le spaghetti comme un segment de longueur 100 unités ;

- un premier nombre au hasard $x \in [0;100[$ représente l'abscisse de la la première coupe ;
- un second nombre au hasard $y \in [0;100[$ représente l'abscisse de la la seconde coupe.

Terminale

On pourra représenter le spaghetti comme un segment de longueur 1 unité ; un premier nombre au hasard $x \in [0;1[$ représente la longueur de la première coupe en pourcentage de la longueur totale ; un deuxième nombre au hasard $y \in [0;1[$ représente la longueur de la deuxième coupe en pourcentage de la longueur du grand bout.

Programme Sratch

Mettre la taille du *Sprite* au minimum (5 ?) et demander les scripts complémentaires pour avoir le stylo.

```
quand [drapeau] est cliqué
effacer tout
Mettre la taille du stylo à (3)
répéter (1000) fois
    mettre [x] à (nombre aléatoire entre (0) et (100))
    mettre [y] à (nombre aléatoire entre (0) et (100))
    si <(x) < (y)> alors
        mettre [bout1 ▾] à (x)
        mettre [bout2 ▾] à ((y) - (x))
        mettre [bout3 ▾] à (100 - (y))
    sinon
        mettre [bout1 ▾] à (y)
        mettre [bout2 ▾] à ((x) - (y))
        mettre [bout3 ▾] à (100 - (x))
    fin
    si <<<((bout1) + (bout2)) > (bout3)> et <((bout2) + (bout3)) > (bout1)>> et <((bout3) + (bout1)) > (bout2)>> alors
        mettre la couleur du stylo à (vert)
    sinon
        mettre la couleur du stylo à (rouge)
    fin
    relever le stylo
    aller à x : (x) y : (y)
    stylo en position d'écriture
    avancer de (1) pas
fin
```

Le même programme en Python

```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3
#
# on casse <n> spaghetti de longueur 100, deux fois simultanément
# au hasard aux points d'abscisses <x> et <y>
# le point de coordonnées <(x;y)> est affiché en vert quand on
# peut construire un triangle, en rouge sinon.
# on renvoie la probabilité de construire un triangle

from random import uniform
from matplotlib import pyplot as plt

n, t = 5000, 0
# on stocke les coordonnées
# dans des listes pour accélérer l'affichage
x_ok, y_ok = [], []
x_non, y_non = [], []
for i in range(n):
    x, y = uniform(0,100), uniform(0,100)
    if x < y:
        bout1, bout2, bout3 = x, y - x, 1 - y
    else:
        bout1, bout2, bout3 = y, x - y, 1 - x
    # pour construire un triangle, on peut:
    # (a) vérifier l'inégalité triangulaire trois fois
    # (b) remarquer que chaque bout doit être inférieur à 1/2
    # collège : méthode (a)
    if (bout1 + bout2 > bout3) and (bout2 + bout3 > bout1) and \
        (bout3 + bout1 > bout2):
        x_ok, y_ok = x_ok + [x], y_ok + [y]
        t = t + 1
    else: # pour le plaisir de changer de méthode d'affectaiton
        x_non.append(x)
        y_non.append(y)

plt.plot(x_non,y_non,'r.') # rouge sinon
plt.plot(x_ok,y_ok,'g.') # vert si OK
plt.title("proba triangle = "+str(t/n))
plt.axis('equal')
plt.axis('on')
plt.show()
```

SPAGHETTI

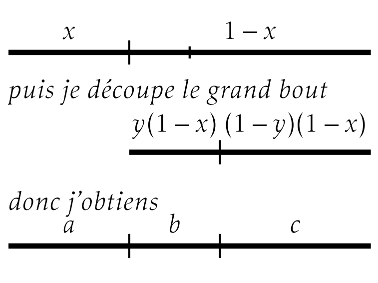
```python
# -*- coding:utf8 -*-
# python 3
#
# on casse <n> spaghetti de longueur 1, au hasard
# <x> est la proportion du premier bout,
# le plus grand des bouts obtenu est partagé suivant <y>
# le point de coordonnées <(x;y)> est affiché en vert quand on
# peut construire un triangle, en rouge sinon.
# on renvoie la probabilité de construire un triangle

from random import uniform
from matplotlib import pyplot as plt

n, t = 5000, 0
# on stocke les coordonnées
# dans des listes pour accélérer l’affichage
x_ok, y_ok = [], []
x_non, y_non = [], []
for i in range(n):
    x, y = uniform(0,1), uniform(0,1)
    # pour construire un triangle, on peut:
    # (a) vérifier l’inégalité triangulaire trois fois
    # (b) remarquer que chaque bout doit être inférieur à 1/2
    # lycée : méthode (b) (démontrée)
    if x < .5: # -> vérifier les longueurs des deux autres
        bouts = [y*(1 - x), (1 - y)*(1 - x)]
    else: # le bout (1-x) < 0.5 -> vérifier les longueurs des deux autres
        bouts = [y*x, (1 - y)*x]
    if max(bouts) < .5:
        x_ok, y_ok = x_ok + [x], y_ok + [y]
        t = t + 1
    else: # pour le plaisir de changer de méthode d’affectation
        x_non.append(x)
        y_non.append(y)

plt.plot(x_non,y_non,'r.') # rouge sinon
plt.plot(x_ok,y_ok,'g.') # vert si OK
plt.title("proba triangle = "+str(t/n))
plt.axis('equal')
plt.axis('on')
plt.show()
```

Je les ai vues ! SPAGHETTI
Je les ai vues ! SPAGHETTI

1. expérimentation / modélisation
2. **a)** $a+b+c=1$

   b) dans un triangle, la somme de deux côtés doit être supérieure (ou égale) au troisième :

$$\begin{cases} a+b & \geqslant c \\ b+c & \geqslant a \\ c+a & \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c & \geqslant 2c \\ b+c+a & \geqslant 2a \\ c+a+b & \geqslant 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & \leqslant \frac{1}{2} \\ a & \leqslant \frac{1}{2} \\ b & \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$



3. **a)** $a=xy$, $b=(1-y)x$, $c=1-x$

$$\begin{cases} a+b & \geqslant c \\ b+c & \geqslant a \\ c+a & \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \geqslant 1-x \\ (1-y)x+(1-x) & \geqslant yx \\ (1-x)+yx & \geqslant (1-y)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \geqslant \dfrac{1}{2} \\ y & \leqslant \dfrac{1}{2x} \\ y & \geqslant 1-\dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

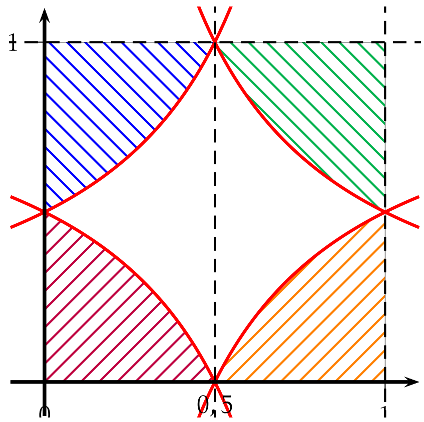
   b) $a=x$, $b=y(1-x)$, $c=(1-y)(1-x)$

$$\begin{cases} a+b & \geqslant c \\ b+c & \geqslant a \\ c+a & \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y(1-x) & \geqslant (1-y)(1-x) \\ y(1-x)+(1-y)(1-x) & \geqslant x \\ (1-y)(1-x)+x & \geqslant y(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & \geqslant 1-\dfrac{1}{2(1-x)} \\ x & \leqslant \dfrac{1}{2} \\ y & \geqslant \dfrac{1}{2(1-x)} \end{cases}$$

4. **a)** Les points des zones hachurées sont ceux dont les coordonnées ne vérifient pas les inéquations précédentes.

   b) Pour des raisons de symétries, l'aire de la zone non hachurée est celle du carré de côté 1 moins 4 fois celle de la zone orangée.

   d'où $\mathscr{A}=1-4\displaystyle\int_{0,5}^{1} 1-\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$



5. $\mathscr{A}=1-4\displaystyle\int_{0,5}^{1} 1-\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = 1-4\int_{0,5}^{1}\mathrm{d}x-\int_{0,5}^{1}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

   Or $x\mapsto 2x$ est positive sur $[0,5;1]$ donc $\displaystyle\int_{0,5}^{1}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_{0,5}^{1}=-\frac{1}{2}\ln(0,5)=\frac{1}{2}\ln(2)$

   la probabilité de construire un triangle est donc : $p=1-2\ln(2)\approx 0,386$