MATHS ET CULTURE ?

1. Niveau - Chapitre de maths

T^ale^ S Introduction aux nombres complexes

- Extrait du *Théorème du Perroquet* de Denis Guedj
- Extraits de *L'Ars Magna* de Cardan

2. Les documents

Une feuille de travail contenant un extrait du *Théorème du Perroquet* de Denis Guedj relatant la vie de Tartaglia et des extraits de *L'Ars Magna* de Cardan.

Voir fichier en fin.

3. Déroulement

35 élèves

25/11/16 (13h30 - 15h30) deuxième heure du cours
Lecture des extraits du *Théorème du Perroquet*. Résolution des problèmes proposés sous forme d'étude de fonction avec rappels du TVI car impossible de résoudre les équations de degré 3 avec les connaissances actuelles.

29/11/16 (9h30-11h30) Lecture de *L'Ars Magna*, application de la méthode (exercice à trou). Application aux problèmes proposés - introduction des nombres imaginaires ; puis cours.

4. Contacts - compléments d'informations

Frédéric Léon - *frederic.leon@ac-creteil.fr*

1. Tartaglia, Ferrari. De la plume au poison.

Le théorème du Perroquet, Denis Guedj – Chapitre 15 (Ed. Point, p.335)

La grande église de Brescia n'a jamais connu une telle affluence. [...] Des dizaines de femmes et d'enfants, entassés, tremblants, ils attendent. Ils espèrent. [...]

Niccoló, sa mère, son frère et sa sœur se terrent près d'un pilier. Il fait presque chaud sous la nef tant il y a de monde, et l'on est en plein hiver ! Le silence est total. Tous les regards sont fixés sur la grande porte. Dehors, le bruit est de plus en plus en fort, de plus en plus proche. À l'intérieur, le silence est terrible. Les respirations se sont arrêtées, les corps se sont pétrifiés. Nous sommes le matin du 9 février 1512.

Dans un fracas épouvantable, la porte se brise. Par l'ouverture béante, une troupe de spadassins s'engouffre. L'épée brandie, ils lancent leurs montures à l'intérieur de l'église. Les chevaux, poussant des hennissements terrifiants, foncent sur cette masse humaine qui hurle de peur. Les gens se sont dressés, ils ne peuvent fuir. Écrasés, étouffés, piétinés. Mais l'horreur est à venir. À coup d'épée, la meute hache les corps sans défense. Comment s'échapper ? Niccoló s'est fait encore plus petit : il s'est blottit dans les bras de sa mère. Un cavalier s'approche du pilier au pied duquel la famille se terre. Niccoló voit l'immense épée grandir, grandir... Puis il ne voir plus rien. L'épée s'est abattue. Sur son crâne, sur son visage. Aveuglement du massacreur, la mère est indemne. Victoire ! Les troupes françaises viennent de s'emparer de la petite bourgade au nord de l'Italie, assassinant, violant, volant, brûlant. [...]

Il [Niccoló] avait la mâchoire fracassée, mais il était vivant.

Il recouvrit peu à peu la parole, mais il bégayait. Ses camarades l'appelèrent Tartaglia, le bègue. Il décida de garder ce nom.

[...] Lorsque Niccoló avait eu ses six ans, son père avait engagé un professeur. Le paiement devait se faire par tiers. Micheletto paya le premier tiers et mourut juste après . Le professeur arrêta net les cours et Niccoló resta en rade, échoué au tiers de l'alphabet. Après I, qu'est-ce qu'il y a et comment cela s'écrit ? Il finit par se procurer un alphabet complet et tout seul, il apprit les deux tiers restants.

fiche élève

fiche élève

[…] Depuis son apprentissage solitaire des deux tiers restants de l'alphabet, Tartaglia avait fait du chemin. Il était toujours aussi petit, mais sa barbe avait grandi. Elle cachait presque entièrement ses blessures. Seule une oreille vigilante aurait pu déceler quelques heurts dans sa prononciation. Savant reconnu, il avait non seulement travaillé sur les « œuvres dhommes défunts », comme il l'avait écrit, mais il les avaient traduites, Euclide, Archimède.

[Tartaglia s'intéressa à la résolution des équations du troisième degré. …p.351]

cubo et cose egual a numero

Un cube et des choses égalent un nombre. C'est sur cette dernière équation que les mathématiciens italiens de l'École de Bologne, au XVIesiècle, vont porter leurs efforts. […] Scipione del Ferro, […] parvint à trouver certaines solutions de l'équation du troisième degré [1]. Au lieu de les publier, il les garda secrètes. […Puis] finit par communiquer sa méthode à son gendre, Annibal de la Nave. […]

Annibal de la Nave ne put tenir sa langue ; il communiqua la méthode à l'un de ses amis, Anton Maria Del Flore. Qui, lui, garda le secret [et] se mit à lancer en son propre nom des défis aux mathématiciens. […]

Tartaglia releva le gant. Un *duel algébrique* s'engagea entre les deux hommes. Chacun déposa une liste de trente problèmes chez un notaire ainsi qu'une somme d'argent. Celui qui, dans les quarante jours aurait résolu le plus de problèmes serait déclaré vainqueur et emporterait l'argent. […]

Tous les problèmes de Del Fiorre mettaient en jeu des équations du troisième degré. Tartaglia les résolut en quelques jours. Del Fiorre ne résolut aucun des problèmes posés par son adversaire. […] Tartaglia ne publia pas sa méthode.

1. Voir l'Ars Magna, à l'époque les nombres sont essentiellement des entiers positifs : cela oblige à traiter différents cas

2. Les 30 problèmes de Del Fiore

Denis Guedj donne des exemples des problèmes de Del Fiore.

a) Trouver un nombre qui, ajouté à sa racine cubique [1], fasse 6.

b) Deux hommes gagnent ensemble 100 ducats, le gain du premier est la racine cubique de la part du second.

c) Un Juif prête un capital à la condition qu'à la fin de l'année on lui paye pour intérêts la racine cubique du capital. À la fin de l'année, le Juif a reçu 800 ducats, capital et intérêts. Quel est ce capital ?

À faire

1. Associer chacun des problèmes à l'une des équations suivantes.
   a) $x + \sqrt[3]{x} = 100$ **b)** $x + \sqrt[3]{x} = 6$ **c)** $x + \sqrt[3]{x} = 800$
2. Pour chacune des équations, la résoudre à l'aide d'une étude de fonction.
3. En déduire une valeur approchée de(s) solution(s) de chaque équation, puis une réponse à chacun des problèmes posés.

fiche élève

fiche élève

3. La méthode de Tartaglia

[...] Ayant eu connaissance de la magistrale réussite de Tartaglia, Cardan entra en contact avec lui. Plusieurs années durant, il poussa Tartaglia à lui communiquer ses formules.

[...] Un jour de mars 1539, Tartaglia céda. Cardan sentit son cœur battre plus fort. Il s'assit et écouta. [...]

> *Tu veux résoudre l'équation un cube et des choses égalent un nombre donné. Trouve deux nombres dont la différence est le nombre donné et dont le produit est le cube du tiers des choses. Alors la solution est la différence des racines cubiques des deux nombres.*

[...] Quelques temps après [...], Cardan publia *l'Ars Magna*. Le Grand Art. Tartaglia s'empressa de lire l'ouvrage de son ami. Qu'y découvrit-il ? Sa propre mé-

1. la racine cubique est notée $\sqrt[3]{x}$. Par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$

thode de résolution de l'équation du troisième degré décrite par le menu ! Cardan l'avait trompé.

4. L'Ars Magna de Cardan

http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf

Un cube et des affaires (choses) égalent un nombre $x^3 + px = q$ avec p et q entiers.

CAPVT XI.

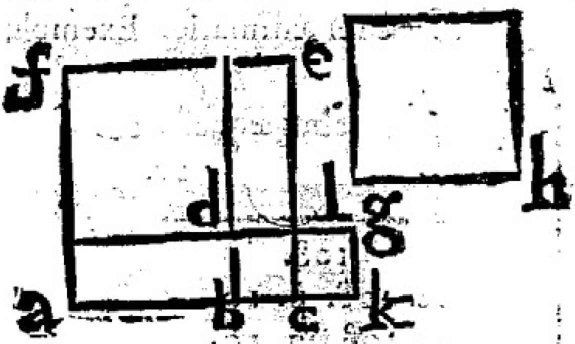
De Cubo & rebus æqualibus Numero.

SCIPIO Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cùm in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando veniſſet, occaſionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus, eámque in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiiciemus.

fiche élève

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus g h, & ſexcuplum lateris g h æquale 20. & ponam duos cubos a e & c l, quorum differentia ſit 20. ita quod productum a c lateris, in



c k latus, ſit 2. tertia ſcilicet numeri rerum pars, & abſcindam c b, æqualem c k, dico, quod ſi ita fuerit, lineam a b reſiduum, eſſe æqualem g h, & ideo rei æſtimationem, nam de g h iam ſupponebatur, quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti

fiche élève

fiche élève

Regvla.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeruabis vnique dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adiicies, ab altera dimidium idem minues, habebiſque Binomium cum ſua Apotomæ, inde detracta ℞. cubica Apotomæ ex ℞. cubica ſui Binomij, reſiduum quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio. Exemplum,

cubus p̃. 6. rebus æqualis 20.
2. 20.
8. ——— 10.
108.
℞. 108. p̃. 10.
℞. 108. m̃. 10.
℞. v. cu. ℞. 108. p̃. 10.
m̃. ℞. v. cu. ℞. 108. m̃. 10.

cubus & 6. poſitiones, æquantur 20. ducito 2. tertiam partem 6. ad cubum, fit 8. duc 10. dimidium numeri in ſe, fit 100.

La règle suivit d'un exemple
p̃ signifie +
m̃ signifie –
℞ signifie racine carrée
℞.v.cu signifie racine cubique

Trouve le tiers de p au cube

auquel tu ajoutes le carré du demi de q

fiche élève

et prends le radical du tout

exemple

cubus	p̃ 6 rebus	aequali	20
x^3	$+6x$	$=$	20
	$\div 3 \downarrow$		$\div 2 \downarrow$
	2		10
	au cube $\downarrow$		au carré $\downarrow$
	8		100
		108	
		$\sqrt{108}+10$	
		$\sqrt{108}-10$	

la solution : $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

5. Applications de la formule

Dans son *Ars Magna*, Cardan propose un autre exemple pour illustrer sa méthode.

fiche élève

Aliud, cubus p̃. 3. rebus æquetur 10. duc 1. tertiam partem 3. ad cubum, fit 1. duc 5. dimidium 10. ad quadratum, fit 25. iunge 25. & 1. fiunt 26. hujus radici adde 5. & ab ea minue 5. habebis Binomium ℞. 26. p̃. 5. & Apotomen ℞. 26. m̃. 5. igitur rei æſtimatio eſt ℞. v. cubica ℞. 26. p̃. 5 m̃. ℞. v. cubica ℞. 26. m̃. 5. experientia ſic habetur.

ra. v. cubica ra. 26. p̃. 5. m̃. ra. v. cubica ra. 27. m̃. 5.

cubi partium ra. 26. p̃. 5. m̃. ra. 26. m̃. 5.

hoc autem totum, vt liquet, eſt 10.

fiche élève

Supposons .... D'une part, 1 est 3,

élevé .... cela fait ... ;

d'autre part 5 est .... 10, élevé .... fait 25.

Ensuite ....

La solution est donc ....

En utilisant la méthode de Cardan, résoudre les équations suivantes :

a) $x^3 + 132x = 1\,267$

b) $x^3 + 109x = 870$

Cardan a généralisé la méthode de Tartaglia et il donne à chaque fois une règle de calcul.

c) Il donne donc une règle au chapitre XII qui s'intitule *De cubo equali rebus et numero*. Mais en acceptant les nombres négatifs, ne peut-on pas appliquer sa méthode pour résoudre : $x^3 = 36x + 91$?
Pour cela il faudrait écrire : $x^3 - 36x = 91$

d) Résoudre sans utiliser la méthode de Cardan (car on remarque une racine évidente) : $x^3 - 21x = 20$

e) Essayer de résoudre cette équation avec la formule de Cardan.

fiche élève

fiche élève